

修士論文

粘性流体中を落下する粒子集団の
数値シミュレーション
集団の回転・分散を支配する要因

東京大学地震研究所
五島 洋行

1997年2月

目次

1	はじめに	2
2	理論	3
2.1	流体の基礎方程式	3
2.2	1 粒子系の理論	4
2.3	2 粒子系への拡張	5
2.4	N 粒子系への拡張	8
2.5	粒子の回転の考慮	8
2.6	2 球間の相互作用	10
2.7	回転を含めた 2 球間の相互作用	11
2.8	粒子同士の衝突による力	13
3	数値計算	15
3.1	方程式の無次元化	15
3.2	連立方程式の解法	16
3.3	常微分方程式系の時間積分	16
4	解析結果	19
4.1	計算条件	19
4.2	1 粒子のみの運動	19
4.3	2 粒子系での運動	19
4.4	3, 4 粒子系	25
4.5	多粒子系	33
4.6	2 次元平面上での運動 (非回転系)	33
4.7	3 次元空間上での運動	33
4.8	粒子の回転の有無による振舞いの違い	46
5	考察	49
6	まとめと火山学への適用	51
7	謝辞	52

1 はじめに

マグマ中に結晶が落下してゆく現象 (固液混相流) や、大気中を火山灰が降下する様子 (固気混相流) などの二相流の現象を解明することは、火山の諸分野での関心事である。

一般にこのような問題の解析には、流体力学の基礎方程式である Navier-Stokes の方程式を用いて解析する方法がよく知られているが、この方法では、膨大な計算時間・記憶容量を要すなどの不都合が多く、特に多粒子系の計算などは今までほとんど行なわれていない。

本研究では、多数の固相粒子を含む流体の運動方程式を直接解く代わりに、粒子間の相互作用を定式化して、多粒子系の運動方程式を解く。ここで、流体の関与は粒子間の相互作用を媒介し、相互に及ぼし合う力を決める形で入ってくる。力が流体の流れによって決まることを除けば、問題は質点系の多体問題を解くことに帰着する。

解析のターゲットは、遅い流れに限ることとし、ストークス近似が成り立つ状況について計算を行なった。

この方法では、粒子間の相互作用が明瞭に記述され、N-S 方程式を直接解かなくてもよいことと、N-S 方程式を解く方法ではせいぜい数粒子のみの解析が限界であるのに比べ、比較的多数 (数百個) の粒子が解析可能であること、二次元、三次元のどちらでも計算時間がそれほど変わらないという利点をもつ。

本研究で得られる結論から、次のような火山分野への応用が考えられる。

マグマ中でできた結晶が、マグマ中から取り除かれやすくなる要因の一つに、結晶 (固体粒子) の落下速度が考えられるが、本研究中では、粒子の数密度が高いほど落下速度が大きくなるという結果が得られており、結晶の生成速度、生成密度などがマグマの組成を変える効果があることなどが推測できる。

また、マグマは、その温度・組成などが通常極めて均一になっていることが知られているが、結晶が集団として落下する時に起こる特有の現象 (粒子集団の回転) がマグマの攪拌を促進する効果があるのではないかと推測も、本研究により多少説明がつく。

2 理論

計算機を用いたシミュレーションを行なうには、粒子間の相互作用ができるだけ簡潔かつ明瞭に表されることが望ましい。

低レイノルズ数における複数粒子間の相互作用について記述した文献としては、Happel (1973) が詳しい。この文献で行なわれている手法は、例えば空間上に A, B 2 粒子があるとし、A の運動が B のまわりに及ぼす擾乱を求め、その擾乱によって B が運動を起こし、A のまわりの新たに起こる擾乱を求める。以下同様に A, B が運動することによって起こる擾乱の総和を逐次求め、適当なところで打ち切って足し合わせる方法である。この方法では、2 粒子の定常運動の解においてさえも非常に複雑な形をしており、3 粒子以上の系を計算機上で実行するのには適さない。また、非定常運動をする粒子が受ける力について記述した文献として、高木・松本 (1996) などがあり、比較的簡単な形の経験式で近似する手法であるが、これも複数の粒子、特に多粒子系に拡張するのが難しい。

そこで、本研究においては、日本混相流学会 (1991) をもとに粒子間の相互作用を求めることとした。この手法では、粒子の速度を与え、粒子が受ける力に関する連立 1 次方程式を解いている。この連立方程式の係数に粒子の速度が入ってくる。以下にその導出を行なう。

2.1 流体の基礎方程式

2.1.1 ストークス近似

非圧縮性粘性流体の運動を支配する基礎方程式は、

$$\text{連続の式} : \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\text{Navier-Stokes 方程式} : \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2)$$

で与えられる。これらの方程式で、同じ添字 (例えば (1) では i) を含む項はその添字についての和をとるものとする。ただし、 u_i は流体の速度、 x_i はデカルト座標、 ρ, p はそれぞれ流体の密度と圧力、 ν は動粘性率を表す。これらの方程式に対して、速度の境界条件

$$u_i = u_{wi} \quad (\text{ただし } u_{wi} \text{ は固体境界の速度})$$

を課して解けば、流体の流れを求めることができる。

Navier-Stokes 方程式 (2) は、無次元化 (3.1 参照) を行なうと、

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{t}} + \hat{u}_j \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_j} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_j^2} \quad (3)$$

と書くことができ、この方程式に現れるパラメーター、

$$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{\rho_0 UL}{\mu}$$

は Reynolds 数と呼ばれ、慣性項と粘性項の比を表す。 $Re \ll 1$ が成り立つ場合、慣性項を粘性項に対して無視することができる。本研究中では、遅い粘性流、すなわち $Re \ll 1$ が成り立つ場合のみを考えることにする。

2.1.2 固体球を過ぎる定常流れ

定常流の場合，連続の方程式 (1) および N-S 方程式 (2) はそれぞれ，

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4)$$

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (5)$$

と書くことができる．無限遠で静止した流体中を，半径 a の球が速度 U_i で定常的に動く時，球が原点にある時のまわりの流れを求めるには，(4), (5) を境界条件

$$\begin{aligned} r \rightarrow \infty \quad \text{の時} \quad u_i &\rightarrow 0, p \rightarrow p_\infty \\ r = a \quad \text{の時} \quad u_i &= U_i \quad \text{ただし } r = \sqrt{\sum x_i^2} \end{aligned}$$

を課して解けばよい．

半径 a の球が x_i 軸方向に沿って速度 U_i で運動する場合，この境界条件を満たす解は，

$$u_i = U_i \frac{a}{4r} \left(3 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{3a(U_j x_j)}{4r^3} x_i \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (6)$$

$$p = p_\infty + \frac{3\mu a}{2r^3} (U_j x_j) \quad (7)$$

となる．

2.2 1 粒子系の理論

2.2.1 ストークス抵抗

(2) において左辺第 2 項 (慣性項) を無視する近似をストークス近似という．この時，速度 v_i で定常的に運動する半径 a の球が受ける抵抗 F_i は，

$$F_i = -6\pi\mu a v_i \quad (8)$$

で与えられる．この抵抗をストークス抵抗と呼ぶ．球が非定常に運動する場合には，(2) の時間微分の項も考慮に入れる必要がある．

Landau and Lifshitz (1950) によれば，固体粒子が速度 $v_i(t)$ で非定常に運動する場合，粒子が受ける力 $F_i(t)$ は

$$F_i(t) = -6\pi\mu a v_i(t) - \frac{2}{3}\pi\rho_0 a^3 \dot{v}_i(t) - 6\pi\mu a^2 \int_{-\infty}^t \frac{\dot{v}_i(\tau)}{\sqrt{\pi\nu(t-\tau)}} d\tau \quad (9)$$

で与えられる．右辺第 1 項はストークス抵抗，第 2 項は誘導質量力，第 3 項は履歴の効果を表している．

粒子の運動を正確にシミュレートするためには，履歴力も考慮に入れることが必要であるが，この項は過去の $v_i(t)$ の値をすべての時間かつすべての粒子について記憶しておく必要があり，記憶容量および計算速度の面で扱いにくい．そこでここでは履歴力が無視

できる状況を想定する。いま，系の代表的な速度を U ，代表的な長さを L とおいて (9) の第 1 項と第 3 項とのオーダーを評価すると，

$$1 : \sqrt{\frac{UL}{\pi\nu}} = 1 : \sqrt{\frac{Re}{\pi}}$$

となるので， $Re \ll 1$ が成り立つ状況ならば無視できることがわかる。

2.2.2 ファクセンの法則

半径 a の球が，粒子がない時の速度場 U_i におかれている時に粒子が受ける力 F_i は， a が微小である時には

$$F_i = 6\pi\mu a U_i$$

が厳密に成り立つが，有限の大きさの球に対しては

$$F_i = 6\pi\mu a \langle U_{\infty i} \rangle \quad (\text{ただし, } \langle \rangle_a \text{ は, 球表面での平均を表す})$$

とする必要がある (日本流体力学学会 1987)。

いま， $U_{\infty i}$ を球の中心 O でテイラー展開し，

$$U_{\infty i} = (U_{\infty i})_o + \left(\frac{\partial U_{\infty i}}{\partial x_k} \right)_o s_k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 U_{\infty i}}{\partial x_k \partial x_l} \right)_o s_k s_l + \dots$$

(s_i は球の中心から表面へのベクトル (図 1))

とすると， $\langle s_i \rangle = 0$ ， $\langle s_k s_l \rangle = \frac{1}{3} a^2 \delta_{kl}$ ， $\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \delta_{kl} = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ などに注意すれば，

$$\langle U_{\infty i} \rangle_a = (U_{\infty i})_o + \frac{1}{6} a^2 \left(\frac{\partial^2 U_{\infty i}}{\partial x_j^2} \right)_o + \dots$$

となるので，球自身の移動速度 v_i も考慮して，

$$F_i = 6\pi\mu a \left\{ -v_i + (U_{\infty i})_o + \frac{a^2}{6} \left(\frac{\partial^2 U_{\infty i}}{\partial x_j^2} \right)_o \right\} \quad (10)$$

と求められる。これをファクセンの法則という。

2.3 2 粒子系への拡張

1 粒子系での考察をもとに，2 粒子間の相互作用を求める。はじめに，微小球同士の相互作用を考える。

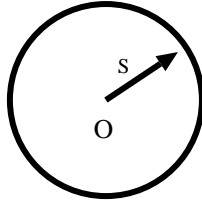


図 1: ファクセンの法則. 球のまわりに生じる流れを, 球の中心でテイラー展開し, その平均をとることにより求める.

2.3.1 ストークスレット

まず, 速度 v_i で運動する半径 a の微小球が生み出す流体の速度場 U_i は, (6) より,

$$U_i = v_i \frac{3a}{4r} + \frac{3a(v_j x_j)}{4r^3} x_i$$

となる. ここで, 右辺に現れる球の速度 v_i を, 関係式 (8) を用いて F_i の式に書き換えると, 速度場, 圧力場はそれぞれ

$$U_i = -\frac{1}{8\pi\mu} \left(\frac{F_i}{r} + \frac{F_j x_j}{r^3} x_i \right) \quad (11)$$

$$p = p_\infty - \frac{F_j x_j}{4\pi r^3} \quad (12)$$

となる. (11), (12) で与えられる解は, ストークス源 (stokeslet) と呼ばれるものである.

2.3.2 オセーンテンソル

半径 a, b の 2 つの球が距離 r だけ離れておかれているものとし, a の位置を原点にとる. a, b が微小の場合, a が速度 v_{ai} で並進する時に作られる流れを, (11) をもとに

$$U_i = -\frac{1}{8\pi\mu} \left(\frac{F_{ai}}{r} + \frac{F_{aj} x_j}{r^3} x_i \right) = -T_{oij} F_{aj}$$

と書くことにすれば, T_{oij} の各成分は,

$$T_{oij} = \frac{1}{8\pi\mu} \left(\frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{x_i x_j}{r^3} \right) \quad (13)$$

と書かれる. この T_{oij} はオセーンテンソルと呼ばれる.

2.3.3 修正されたオセーンテンソル

(13) を有限な大きさを持つ 2 球の場合にも成り立つように修正する. 基本的な考え方は, ファクセンの法則を導いた時と同様で, 球の表面上での平均をとることを考える. 図 2 のように 2 球 A, B を考え, 球の中心から表面上にいたるベクトルをそれぞれ $\mathbf{s}_a, \mathbf{s}_b$ と

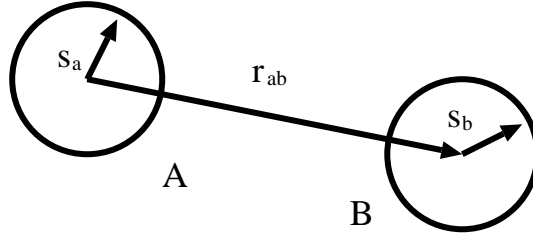


図 2: 2 粒子系でのファクセンの法則. 2 球とも微小であると仮定して相互作用を求め, 球の中心でテイラー展開して平均をとることにより求める.

する. この時, 球 A のまわりに生じる B による流れの擾乱 $\langle U_{bi} \rangle_a$ を求める. ただし, $\langle \rangle_a$ は球 a の表面上での平均を表す.

オseenテンソル (13) を用いると,

$$\langle U_{bi} \rangle_a = - \langle \langle T_{oij}(\mathbf{r} + \mathbf{s}_b - \mathbf{s}_a) F_{bj} \rangle_b \rangle_a = - \langle \langle T_{oij}(\mathbf{r} + \mathbf{s}_b - \mathbf{s}_a) \rangle_b \rangle_a F_{bj}$$

となるが, $T_{oij}(\mathbf{r} + \mathbf{s}_b - \mathbf{s}_a)$ を \mathbf{r} のまわりで

$$T_{oij}(\mathbf{r} + \mathbf{s}_b - \mathbf{s}_a) = (\mathbf{s}_{bk} - \mathbf{s}_{ak}) \frac{\partial T_{oij}}{\partial x_k} + \frac{1}{2} (\mathbf{s}_{bk} - \mathbf{s}_{ak})(\mathbf{s}_{bl} - \mathbf{s}_{al}) \frac{\partial^2 T_{oij}}{\partial x_k \partial x_l} + \dots$$

とテイラー展開し, $\langle \mathbf{s}_{bi} \rangle_b = \langle \mathbf{s}_{ai} \rangle_a = 0$, $\langle \mathbf{s}_{ai} \mathbf{s}_{aj} \rangle = \frac{1}{3} a^2 \delta_{ij}$, $\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \delta_{kl} = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$, などに注意すれば,

$$\langle U_{bi} \rangle_a = - \left(T_{oij} + \frac{a^2 + b^2}{6} \frac{\partial^2 T_{oij}}{\partial x_k^2} \right) F_{bj} = -T_{ij} F_{bj}$$

となる. ここで T_{ij} を修正された Oseen テンソルとよび, 各成分は

$$T_{ij} = \frac{1}{8\pi\mu} \left\{ \left(\frac{1}{r} + \frac{a^2 + b^2}{3r^3} \right) \delta_{ij} + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r^5} \right) r_i r_j \right\} \quad (14)$$

と書かれる. ここで, r, r_i, r_j は A の中心から B へ至るベクトルの大きさおよびその成分である. 結局, 球 B の並進運動によって球 A のまわりに生じる速度場の擾乱 $\langle U_{bi} \rangle_a^{trns}$ は,

$$\langle U_{bi} \rangle_a^{trns} = -T_{ij} F_{bj}$$

と書かれ, T_{ij} の各成分は, (14) で与えられる.

2.3.4 2 粒子が受ける力

修正されたオseenテンソル (14) をもとに, 2 球 A, B が受ける力 F_{ai} , F_{bi} を求めると,

$$\begin{aligned} F_{ai} &= -6\pi\mu a \left(v_{ai} + T_{ij}^{(ab)} F_{bj} \right) \\ F_{bi} &= -6\pi\mu b \left(v_{bi} + T_{ij}^{(ab)} F_{aj} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

となる. ここで (15) の左辺に現れる F_{ai}, F_{bi} と, 右辺の F_{aj}, F_{bj} はともに粒子 A, B が受ける力の成分である. これらを同一視すると, (15) は F_a, F_b に関する連立1次方程式となり, 粒子の座標と速度を与えて解くことで, 粒子に働く力を直接求めることができる.

2.4 N 粒子系への拡張

N 粒子系の相互作用を求めるためには, 2粒子系の結果を拡張して,

$$\begin{aligned} F_{1i} &= -6\pi\mu a_1 \left(v_{1i} + \sum_{k=1, k \neq 1}^N T_{ij}^{(1k)} F_{kj} \right) \\ F_{2i} &= -6\pi\mu a_2 \left(v_{2i} + \sum_{k=1, k \neq 2}^N T_{ij}^{(2k)} F_{kj} \right) \\ &\vdots \\ F_{Ni} &= -6\pi\mu a_N \left(v_{Ni} + \sum_{k=1, k \neq N}^N T_{ij}^{(Nk)} F_{kj} \right) \end{aligned}$$

の連立1次方程式を解けばよい. これは,

$$\tilde{T}\tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{v}}$$

の形にまとめることができ, \tilde{T} は $3N \times 3N$ の行列, $\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{v}}$ は $3N$ 次元のベクトルである.

おのおのの行列やベクトルの具体的な形は,

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \begin{pmatrix} I & 6\pi\mu a_1 T_{ij}^{(12)} & 6\pi\mu a_1 T_{ij}^{(13)} & \cdots & 6\pi\mu a_N T_{ij}^{(1N)} \\ 6\pi\mu a_2 T_{ij}^{(21)} & I & 6\pi\mu a_2 T_{ij}^{(23)} & \cdots & 6\pi\mu a_N T_{ij}^{(2N)} \\ 6\pi\mu a_3 T_{ij}^{(31)} & 6\pi\mu a_3 T_{ij}^{(32)} & I & \cdots & 6\pi\mu a_N T_{ij}^{(3N)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 6\pi\mu a_N T_{ij}^{(N1)} & 6\pi\mu a_N T_{ij}^{(N2)} & 6\pi\mu a_N T_{ij}^{(N3)} & \cdots & I \end{pmatrix} \\ \tilde{\mathbf{f}} &= (F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, F_{2x}, F_{2y}, \cdots, F_{Nz})^t \\ \tilde{\mathbf{v}} &= -6\pi\mu (a_1 v_{1x}, a_1 v_{1y}, a_1 v_{1z}, a_2 v_{2x}, a_2 v_{2y}, \cdots, a_N v_{Nz})^t \end{aligned}$$

となる.

2.5 粒子の回転の考慮

これまでは, 粒子の回転の影響を考慮していないが, せん断流中などでは粒子の回転も考慮すべきである. 以下では, その影響を考慮した場合に流れ場がどのように扱うか, さらに粒子が受ける力をどのように扱うかを考える.

2.5.1 微小回転球のまわりの流れ

半径 a の微小球が、原点において角速度 ω_i でゆっくりと回転する場合、周囲の流れを求めるには、境界条件

$$r = a \text{ の時 } u_i = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_i$$

を課して (4), (5) を解く. その解は

$$u_i = \frac{a^3}{r^3} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_i \quad (16)$$

となる. また, その時に球に働くモーメント \mathbf{M} は, 球の表面上で接線応力を積分することにより,

$$\mathbf{M} = -8\pi\mu a^3 \boldsymbol{\omega}$$

成分ごとに表せば,

$$M_i = -8\pi\mu a^3 \omega_i$$

と求められる. 球が非定常に回転する場合には, (2) の時間微分の項も考慮に入れて計算することが必要である. 日本流体力学学会 (1987) によれば, その解は,

$$M_i(t) = -8\pi\mu a^3 \left\{ \omega_i(t) + \frac{1}{3} \int_{-\infty}^t \dot{\omega}_i(\tau) \left[\frac{a}{\sqrt{\pi\nu(t-\tau)}} - \exp\left(\frac{\nu(t-\tau)}{a^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\pi\nu(t-\tau)}}{a}\right) \right] d\tau \right\} \quad (17)$$

で与えられる. 回転を考慮した系においても, 右辺第2項に現れる履歴の効果を表す積分項が無視できる条件で計算を行なう. 並進運動の時と同様に, 系の代表的な速度を U , 代表的な長さを L とおいて (17) の第1項と第2項とのオーダー評価を行なうと,

$$1 : \frac{1}{3} \sqrt{\frac{UL}{\pi\nu}} = 1 : \frac{1}{3} \sqrt{\frac{Re}{\pi}}$$

となるから, 回転運動においても

$$Re \ll 1$$

という条件が履歴の効果が無視できる条件となる.

2.5.2 回転系におけるファクセンの法則

角速度 ω_i で回転する球が, 粒子がない時の速度場 $U_{\infty i}$ におかれている時に粒子が受けるモーメント M_i は, 球の半径 a が微小である時には,

$$M_i = 8\pi\mu a^3 \left(\frac{1}{2} \operatorname{rot} U_{\infty i} \right)$$

であるが, 有限の大きさの球に対しては,

$$M_i = 8\pi\mu a^3 \left\langle \frac{1}{2} \operatorname{rot} U_{\infty i} \right\rangle \quad (\text{ただし, } \langle \rangle_a \text{ は, 球表面での平均を表す})$$

とする必要がある.

2.5.3 球の回転による流れ場の擾乱

非回転系において2球間の相互作用を求めるのに、速度場の擾乱 U_i を、球の速度 v_i でなく、球が受ける力 F_i に書き直して連立1次方程式を導いた。回転系においても同様に、球の速度 v_i (16) を、球が受けるモーメント M_i に書き直す。すると、速度場の擾乱 U_i は、

$$U_i = -\frac{1}{8\pi\mu} \frac{\epsilon_{ijk} M_j r_k}{r^3} \quad (18)$$

と書ける。ただし、 ϵ_{ijk} は (i, j, k) が順列 $(1, 2, 3, 1, 2, \dots)$ をとる時に1, $(2, 1, 3, 2, 1, \dots)$ をとる時に-1, それ以外の時には0をとるものとする。結局、速度場の擾乱には、球の並進運動によるものと、回転運動によるものとの2つの寄与があり、以降、それぞれを U_i^{trns} , U_i^{rot} などと添字をつけて表すことにする。

2.6 2球間の相互作用

空間中に2球A, Bが配置され、それぞれ速度 v_{ai} , v_{bi} で並進し、また、角速度 ω_{ai} , ω_{bi} で回転するものとする。ファクセンの法則を用いると、球Aが受ける力 F_{ai} およびモーメント M_{ai} は、

$$\begin{aligned} F_{ai} &= -6\pi\mu a \left\{ v_{ai} - \left(\langle v_{bi} \rangle_a^{trns} + \langle v_{bi} \rangle_a^{rot} \right) \right\} \\ M_{ai} &= -8\pi\mu a^3 \left\{ \omega_{ai} - \frac{1}{2} \text{rot} \left(\langle v_{bi} \rangle_a^{trns} + \langle v_{bi} \rangle_a^{rot} \right) \right\} \end{aligned}$$

となる。右辺の平均をとった4つの項はそれぞれ次の効果の寄与である。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \langle v_{bi} \rangle_a^{trns} & : \text{粒子Bの並進によってAが受ける並進の力} \\ \langle v_{bi} \rangle_a^{rot} & : \text{粒子Bの回転によってAが受ける並進の力} \\ \frac{1}{2} \text{rot} \langle v_{bi} \rangle_a^{trns} & : \text{粒子Bの並進によってAが受ける回転の力} \\ \frac{1}{2} \text{rot} \langle v_{bi} \rangle_a^{rot} & : \text{粒子Bの回転によってAが受ける回転の力} \end{array} \right.$$

これらのうち、非回転系でも存在する項は $\langle v_{bi} \rangle_a^{trns}$ であり、これについてはすでに導いた。以下では、 $\langle v_{bi} \rangle_a^{rot}$, $\frac{1}{2} \text{rot} \langle v_{bi} \rangle_a^{trns}$, $\frac{1}{2} \text{rot} \langle v_{bi} \rangle_a^{rot}$ の導出を行なう。

2.6.1 球の回転によって生じる並進力

半径 b の球が原点におかれ、そこから距離 r だけ離れて半径 a の球がおかれている状況を考える。球 b の回転による流れの擾乱は、(18) のように表されるが、これを(13)にならない、テンソル形式に書き換えて

$$U_i = -\frac{1}{8\pi\mu} \frac{\epsilon_{ijk} M_j r_k}{r^3} = -S_{ij} M_j$$

と書けば、 S_{ij} の各成分は、

$$S_{ij} = \frac{1}{8\pi\mu} \frac{\epsilon_{ijk} r_k}{r^3} \quad (19)$$

となる．従って，球Bの回転による速度場の擾乱 $\langle U_{bi} \rangle_a^{rot}$ は，

$$\langle U_{bi} \rangle_a^{rot} = -S_{ij}M_{bj} \quad (20)$$

と書くことができる．

2.6.2 球の並進によって生じるモーメント

半径 b の球Bの並進によって球Aが受けるモーメントを考える．これまでと同様，球Bが受ける力とテンソルとの積の形で，

$$\frac{1}{2} \text{rot} \langle v_{bi} \rangle_a^{trns} = -P_{ij}F_{bj}$$

と書くことにする．(14) を用いて計算すると，

$$\frac{1}{2} \text{rot} \langle v_{bi} \rangle_a^{trns} = -\frac{1}{8\pi\mu} \frac{\mathbf{F}_b \times \mathbf{r}}{r^3} = -\frac{1}{8\pi\mu} \frac{\epsilon_{ijk}r_k}{r^3} F_{bj} \quad (21)$$

と計算されるので， P_{ij} の各成分は

$$P_{ij} = \frac{1}{8\pi\mu} \frac{\epsilon_{ijk}r_k}{r^3}$$

と表される．これは (19) と同じ形をしている．

2.6.3 球の回転によって生じるモーメント

半径 b の球の回転が起す速度場の擾乱から受ける球Aのモーメントも，

$$\frac{1}{2} \text{rot} \langle v_{bi} \rangle_a^{rot} = -Q_{ij}M_{bj}$$

の形に書くことにする．これは，(19) を用いて計算すると，

$$\frac{1}{2} \text{rot} \langle v_{bi} \rangle_a^{rot} = -\frac{1}{16\pi\mu} \left(\frac{\delta_{ij}}{r^3} - \frac{3r_i r_j}{r^5} \right) M_{bj} \quad (22)$$

となるので， Q_{ij} の各成分は，

$$Q_{ij} = \frac{1}{16\pi\mu} \left(\frac{\delta_{ij}}{r^3} - \frac{3r_i r_j}{r^5} \right) \quad (23)$$

である．これは，(14) の高次項と同じ形をしている．

2.7 回転を含めた2球間の相互作用

2球間の相互作用によって粒子が受ける力およびモーメントは，これまでに導いた4つのテンソルを用いて表すと，それぞれ

$$\begin{aligned} F_{ai} &= -6\pi\mu a (v_{ai} + T_{ij}F_{bj} + S_{ij}M_{bj}) \\ M_{ai} &= -8\pi\mu a^3 (\omega_{ai} + P_{ij}F_{bj} + Q_{ij}M_{bj}) \end{aligned}$$

となる．球Bについては a と b を交換すればよい．

2.7.1 N 粒子系への拡張

N 個の粒子間の相互作用を求めるには、前項の結果を拡張し、

$$\begin{aligned}
F_{1i} &= -6\pi\mu a_1 \left\{ v_{1i} + \sum_{b=1, b \neq 1}^N \left(T_{ij}^{(1b)} F_j^{(b)} + S_{ij}^{(1b)} M_j^{(b)} \right) \right\} \\
M_{1i} &= -8\pi\mu a_1^3 \left\{ \omega_{1i} + \sum_{b=1, b \neq 1}^N \left(P_{ij}^{(1b)} F_j^{(b)} + Q_{ij}^{(1b)} M_j^{(b)} \right) \right\} \\
F_{2i} &= -6\pi\mu a_2 \left\{ v_{2i} + \sum_{b=1, b \neq 2}^N \left(T_{ij}^{(2b)} F_j^{(b)} + S_{ij}^{(2b)} M_j^{(b)} \right) \right\} \\
M_{2i} &= -8\pi\mu a_2^3 \left\{ \omega_{2i} + \sum_{b=1, b \neq 2}^N \left(P_{ij}^{(2b)} F_j^{(b)} + Q_{ij}^{(2b)} M_j^{(b)} \right) \right\} \\
&\vdots \\
F_{Ni} &= -6\pi\mu a_N \left\{ v_{Ni} + \sum_{b=1, b \neq N}^N \left(T_{ij}^{(Nb)} F_j^{(b)} + S_{ij}^{(Nb)} M_j^{(b)} \right) \right\} \\
M_{Ni} &= -8\pi\mu a_N^3 \left\{ \omega_{Ni} + \sum_{b=1, b \neq N}^N \left(P_{ij}^{(Nb)} F_j^{(b)} + Q_{ij}^{(Nb)} M_j^{(b)} \right) \right\}
\end{aligned}$$

を解けばよい。これは、非回転系の時と同様、連立 1 次方程式

$$\tilde{T}\tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{v}}$$

の形にまとめられる。ただし、 \tilde{T} は $6N \times 6N$ の行列、 $\tilde{\mathbf{f}}$ 、 $\tilde{\mathbf{u}}$ は $6N$ 次元のベクトルである。

行列 \tilde{T} の具体的な形は、

$$\tilde{T} = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
I & R_1 T^{(12)} & R_1 T^{(13)} & \cdots & R_1 T^{(1N)} & O & R_1 S^{(12)} & R_1 S^{(13)} & \cdots & R_1 S^{(1N)} \\
R_2 T^{(21)} & I & R_2 T^{(23)} & \cdots & R_2 T^{(2N)} & R_2 S^{(21)} & O & R_2 S^{(23)} & \cdots & R_2 S^{(2N)} \\
R_3 T^{(31)} & R_3 T^{(32)} & I & \cdots & R_3 T^{(3N)} & R_3 S^{(31)} & R_3 S^{(32)} & O & \cdots & R_3 S^{(3N)} \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
R_N T^{(N1)} & R_N T^{(N2)} & \cdots & \cdots & I & R_N S^{(N1)} & R_N S^{(N2)} & \cdots & \cdots & O \\
\hline
O & L_1 P^{(12)} & L_1 P^{(13)} & \cdots & L_1 P^{(1N)} & I & L_1 Q^{(12)} & L_1 Q^{(13)} & \cdots & L_1 Q^{(1N)} \\
L_2 P^{(21)} & O & L_2 P^{(23)} & \cdots & L_2 P^{(2N)} & L_2 Q^{(21)} & I & L_2 Q^{(23)} & \cdots & L_2 Q^{(2N)} \\
L_3 P^{(31)} & L_3 P^{(32)} & O & \cdots & L_3 P^{(3N)} & L_3 Q^{(31)} & L_3 Q^{(32)} & I & \cdots & L_3 Q^{(3N)} \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
L_N P^{(N1)} & L_N P^{(N2)} & \cdots & \cdots & O & L_N Q^{(N1)} & L_N Q^{(N2)} & \cdots & \cdots & I
\end{array} \right) \quad (24)$$

ただし、

$$R_1 = 6\pi\mu a_1, R_2 = 6\pi\mu a_2, \cdots, L_1 = 8\pi\mu a_1^3, L_2 = 8\pi\mu a_2^3, \cdots$$

また、 $\tilde{\mathbf{f}}$ および $\tilde{\mathbf{u}}$ の具体的な形は、

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} (F_{1x}, F_{1y}, F_{1z})^t \\ (F_{2x}, F_{2y}, F_{2z})^t \\ \vdots \\ (F_{Nx}, F_{Ny}, F_{Nz})^t \\ (M_{1x}, M_{1y}, M_{1z})^t \\ (M_{2x}, M_{2y}, M_{2z})^t \\ \vdots \\ (M_{Nx}, M_{Ny}, M_{Nz})^t \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = - \begin{pmatrix} (R_1 v_{1x}, R_1 v_{1y}, R_1 v_{1z})^t \\ (R_2 v_{2x}, R_2 v_{2y}, R_2 v_{2z})^t \\ \vdots \\ (R_N v_{Nx}, R_N v_{Ny}, R_N v_{Nz})^t \\ (L_1 \omega_{1x}, L_1 \omega_{1y}, L_1 \omega_{1z})^t \\ (L_2 \omega_{2x}, L_2 \omega_{2y}, L_2 \omega_{2z})^t \\ \vdots \\ (L_N \omega_{Nx}, L_N \omega_{Ny}, L_N \omega_{Nz})^t \end{pmatrix}$$

である。

2.7.2 回転の運動方程式

1 粒子系において、粒子が受けるモーメントを \mathbf{M} とおくと、回転の運動方程式は

$$I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{M}$$

であるから、 N 粒子系における粒子の回転の運動方程式の各成分は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\omega_{1x}}{dt} &= M_{1x}, & I_2 \frac{d\omega_{2x}}{dt} &= M_{2x}, & \dots, & & I_N \frac{d\omega_{Nx}}{dt} &= M_{Nx}, \\ I_1 \frac{d\omega_{1y}}{dt} &= M_{1y}, & I_2 \frac{d\omega_{2y}}{dt} &= M_{2y}, & \dots, & & I_N \frac{d\omega_{Ny}}{dt} &= M_{Ny}, \\ I_1 \frac{d\omega_{1z}}{dt} &= M_{1z}, & I_2 \frac{d\omega_{2z}}{dt} &= M_{2z}, & \dots, & & I_N \frac{d\omega_{Nz}}{dt} &= M_{Nz} \end{aligned}$$

2.8 粒子同士の衝突による力

粒子に働く力のうち、これまでは流体を介して働く相互作用だけを考えてきたが、実際には粒子同士が直接衝突することもあり、その影響も考慮しなければならない。

本研究中では、粒子同士の衝突とは、図 3 のように特定の 2 粒子の中心間の距離が半径の和より小さくなった場合と定義し、衝突による力は Hakuno (1991) にならい、フックの法則が成立するバネモデルを仮定する。

特定の 2 粒子 A, B の位置を r_{ai} , r_{bi} , 半径を a , b とおくと、 $|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a| < a + b$ の時、

$$\begin{aligned} F_{ai} &= -kd \frac{r_i}{|\mathbf{r}|} \\ F_{bi} &= kd \frac{r_i}{|\mathbf{r}|} \quad \text{ただし} \quad d = a + b - |\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a| \end{aligned}$$

が成り立つものとする。ここで、 k は十分大きな数のバネ定数である。

N 粒子系に対してはこれらの力の和で表されるものとする。

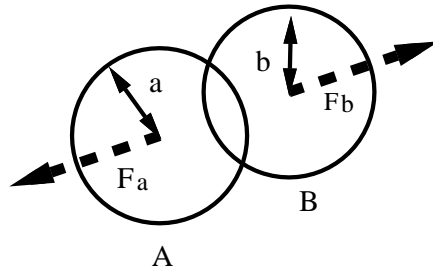


図 3: 粒子同士が衝突した状態.

2.8.1 粒子の運動方程式

履歴の項が無視できる条件のもので、粒子に働く力は、重力などの外力 \mathbf{F}_g ，誘導質量力 \mathbf{F}_i ，流体を通して働く粒子間の相互作用 \mathbf{F}_f ，粒子同士の衝突による反発 \mathbf{F}_d に分けることができる。

したがって、粒子の運動方程式は

$$M_i \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_f + \mathbf{F}_d$$

と書くことができ、外力 \mathbf{F}_g および誘導質量力 \mathbf{F}_i を具体的な表式にかえると、

$$\left(M + \frac{1}{2}m\right) \frac{d\mathbf{V}}{dt} = (M - m)\mathbf{g} + \mathbf{F}_f + \mathbf{F}_d$$

となる。ここで、 m は固体粒子と同体積の流体の質量である。 \mathbf{F}_f は (2.7.1) で、また \mathbf{F}_d は (2.8) で与えられている。

3 数値計算

3.1 方程式の無次元化

実際の数値計算は、方程式を無次元化してから行なう。

代表的な長さを L 、代表的な速度を U とおいて、方程式系に現れる変数を次のように無次元化する。

$$\tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{U}, \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega}{U/L}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{L/U}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho_0 U^2}$$

この無次元化により、連続の方程式 (1) および Navier-Stokes 方程式 (2) は次のように書かれる。

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_i} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j^2} \quad (26)$$

従って、流体の流れはレイノルズ数 Re のみを含む方程式で決定される (巽 1984)。

また、粒子の並進および回転の運動方程式を無次元化すると、それぞれ次のようになる。

$$\tilde{a}_k^3 \left(\frac{\rho_k}{\rho_0} + \frac{1}{2} \right) \frac{d u_{ki}}{dt} = -\tilde{a}_k^3 \left(\frac{\rho_k}{\rho_0} - 1 \right) \tilde{g}_i + (\tilde{F}_d)_{ki} + (\tilde{F}_f)_{ki} \quad (27)$$

$$\tilde{a}_k^5 \frac{\rho_k}{\rho_0} \frac{d \omega_{ki}}{dt} = (\tilde{M})_{ki} \quad (28)$$

ここで添字 k は粒子の番号 ($1, 2, \dots, N$)、 i は座標成分の番号 (x, y, z) を表している。また、 ρ_k は粒子の密度、 \tilde{a}_k は粒子の半径、 \tilde{g}_i は重力、 $(\tilde{F}_d)_{ki}$ は粒子同士の衝突による力、 $(\tilde{F}_f)_{ki}$ は流体を介して働く力、 $(\tilde{M})_{ki}$ は粒子に働くモーメントである。

$(\tilde{F}_f)_{ki}$ 、 $(\tilde{M})_{ki}$ は次の連立方程式を解くことによって得られる。

$$\tilde{T} \tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{v}} \quad (29)$$

$$\tilde{T} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} I & R_1 T^{(12)} & R_1 T^{(13)} & \dots & R_1 T^{(1N)} & O & R_1 S^{(12)} & R_1 S^{(13)} & \dots & R_1 S^{(1N)} \\ R_2 T^{(21)} & I & R_2 T^{(23)} & \dots & R_2 T^{(2N)} & R_2 S^{(21)} & O & R_2 S^{(23)} & \dots & R_2 S^{(2N)} \\ R_3 T^{(31)} & R_3 T^{(32)} & I & \dots & R_3 T^{(3N)} & R_3 S^{(31)} & R_3 S^{(32)} & O & \dots & R_3 S^{(3N)} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ R_N T^{(N1)} & R_N T^{(N2)} & \dots & \dots & I & R_N S^{(N1)} & R_N S^{(N2)} & \dots & \dots & O \\ \hline O & L_1 P^{(12)} & L_1 P^{(13)} & \dots & L_1 P^{(1N)} & I & L_1 Q^{(12)} & L_1 Q^{(13)} & \dots & L_1 Q^{(1N)} \\ L_2 P^{(21)} & O & L_2 P^{(23)} & \dots & L_2 P^{(2N)} & L_2 Q^{(21)} & I & L_2 Q^{(23)} & \dots & L_2 Q^{(2N)} \\ L_3 P^{(31)} & L_3 P^{(32)} & O & \dots & L_3 P^{(3N)} & L_3 Q^{(31)} & L_3 Q^{(32)} & I & \dots & L_3 Q^{(3N)} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ L_N P^{(N1)} & L_N P^{(N2)} & \dots & \dots & O & L_N Q^{(N1)} & L_N Q^{(N2)} & \dots & \dots & I \end{array} \right)$$

ただし、 $R_1 = \tilde{a}_1, R_2 = \tilde{a}_2, \dots, L_1 = \tilde{a}_1^3, L_2 = \tilde{a}_2^3, \dots$

無次元化された系での各テンソル $T_{ij}^{(ab)}$, $S_{ij}^{(ab)}$, $P_{ij}^{(ab)}$, $Q_{ij}^{(ab)}$ はそれぞれ次のように書ける.

$$T_{ij}^{(ab)} = \frac{3}{4}\tilde{a} \left\{ \left(\frac{1}{\tilde{r}} + \frac{\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2}{3\tilde{r}^2} \right) \delta_{ij} + \left(\frac{1}{\tilde{r}^3} - \frac{\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2}{\tilde{r}^5} \right) \tilde{r}_i \tilde{r}_j \right\} \quad (30)$$

$$S_{ij}^{(ab)} = \frac{3}{10}\tilde{a} \frac{\epsilon_{ijk} \tilde{r}_k}{\tilde{r}^3} \quad (31)$$

$$Q_{ij}^{(ab)} = \frac{5}{2}\tilde{a}^3 \frac{\epsilon_{ijk} \tilde{r}_k}{\tilde{r}^3} \quad (32)$$

$$R_{ij}^{(ab)} = \frac{1}{2}\tilde{a}^3 \left(\frac{\delta_{ij}}{\tilde{r}^3} - \frac{3\tilde{r}_i \tilde{r}_j}{\tilde{r}^5} \right) \quad (33)$$

また, $\tilde{\mathbf{f}}$ および $\tilde{\mathbf{u}}$ は,

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} (\tilde{F}_{1x}, \tilde{F}_{1y}, \tilde{F}_{1z})^t \\ (\tilde{F}_{2x}, \tilde{F}_{2y}, \tilde{F}_{2z})^t \\ \vdots \\ (\tilde{F}_{Nx}, \tilde{F}_{Ny}, \tilde{F}_{Nz})^t \\ (\tilde{M}_{1x}, \tilde{M}_{1y}, \tilde{M}_{1z})^t \\ (\tilde{M}_{2x}, \tilde{M}_{2y}, \tilde{M}_{2z})^t \\ \vdots \\ (\tilde{M}_{Nx}, \tilde{M}_{Ny}, \tilde{M}_{Nz})^t \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{v}} = - \begin{pmatrix} 9/(2Re) & (R_1 \tilde{v}_{1x}, R_1 \tilde{v}_{1y}, R_1 \tilde{v}_{1z})^t \\ 9/(2Re) & (R_2 \tilde{v}_{2x}, R_2 \tilde{v}_{2y}, R_2 \tilde{v}_{2z})^t \\ \vdots & \vdots \\ 9/(2Re) & (R_N \tilde{v}_{Nx}, R_N \tilde{v}_{Ny}, R_N \tilde{v}_{Nz})^t \\ 1/(15Re) & (L_1 \tilde{\omega}_{1x}, L_1 \tilde{\omega}_{1y}, L_1 \tilde{\omega}_{1z})^t \\ 1/(15Re) & (L_2 \tilde{\omega}_{2x}, L_2 \tilde{\omega}_{2y}, L_2 \tilde{\omega}_{2z})^t \\ \vdots & \vdots \\ 1/(15Re) & (L_N \tilde{\omega}_{Nx}, L_N \tilde{\omega}_{Ny}, L_N \tilde{\omega}_{Nz})^t \end{pmatrix}$$

である.

3.2 連立方程式の解法

粒子が流体を介して受ける力は, (29) のように連立方程式で与えられるが, 連立方程式を解くには, LU分解法を用いた. LU分解法のような直接法より高速に連立方程式を解く手法として, 共役勾配法 (CG法) などの反復法が知られているが, 本研究で現れる係数行列 (F とする) の $F^t F$ が数値計算上非常になため, あえて用いなかった.

3.3 常微分方程式系の時間積分

微分方程式の時間積分には, 四次の Runge-Kutta-Gill 法を用い, 時間刻みは, あらかじめ定めた目標誤差に近い値をとるように自動的に調節する方法を用いた.

3.3.1 四次の Runge-Kutta-Gill 法

連立常微分方程式

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = f(\mathbf{y}, t)$$

が与えられているものとする. いま, 時刻 $t = t_0$ での \mathbf{y} の値を \mathbf{y}_0 とし, 時間 h だけ進む時, $t = t_0 + h$ での値は, 次のように計算する.

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= f(\mathbf{y}_0, t_0)h \\
\mathbf{r}_1 &= \frac{\mathbf{k}_1 - 2\mathbf{q}_0}{2} \\
\mathbf{q}_1 &= \mathbf{q}_0 + 3\mathbf{r}_1 - \frac{\mathbf{k}_1}{2} \\
\mathbf{y}_1 &= \mathbf{y}_0 + \mathbf{r}_1 \\
\mathbf{k}_2 &= f(\mathbf{y}_1, t_0 + \frac{h}{2})h \\
\mathbf{r}_2 &= \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_1) \\
\mathbf{q}_2 &= \mathbf{q}_1 + 3\mathbf{r}_2 - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{k}_2 \\
\mathbf{y}_2 &= \mathbf{y}_1 + \mathbf{r}_2 \\
\mathbf{k}_3 &= f(\mathbf{y}_2, t_0 + \frac{h}{2})h \\
\mathbf{r}_3 &= \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\mathbf{k}_3 - \mathbf{q}_2) \\
\mathbf{q}_3 &= \mathbf{q}_2 + 3\mathbf{r}_3 - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{k}_3 \\
\mathbf{y}_3 &= \mathbf{y}_2 + \mathbf{r}_3 \\
\mathbf{k}_4 &= f(\mathbf{y}_3, t_0 + h)h \\
\mathbf{r}_4 &= \frac{\mathbf{k}_4 - 2\mathbf{q}_3}{6} \\
\mathbf{q}_4 &= \mathbf{q}_3 + 3\mathbf{r}_4 - \frac{\mathbf{k}_4}{2} \\
\mathbf{y}_4 &= \mathbf{y}_3 + \mathbf{r}_4
\end{aligned}$$

ここで、 \mathbf{q} は $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$ からスタートし、ステップ h だけ進むごとに $\mathbf{q}_4, \mathbf{y}_4$ は次のステップの $\mathbf{q}_0, \mathbf{y}_0$ にもどす。

この四次の Runge-Kutta-Gill 法の計算精度は、 $o(h^4)$ で与えられる。同じ四次の精度を持つ常微分方程式の数値解法として、Runge-Kutta 法が良く知られているが、この方法は $\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ をすべて用いて次のステップを計算するので、それらすべてを記憶しておかなければならない。これに対し、Runge-Kutta-Gill 法は、その直前の \mathbf{k} のみを用いて計算するので、記憶容量が、より少なくて済むという利点を持つ。

3.3.2 時間きざみ幅の調節

時間きざみの決定には Press et al. (1993) による Runge-Kutta 法に対する適応刻み幅調節の方法を用いた。

関数 $f(t)$ を時刻 $t = t_0$ から $t = t_0 + 2h$ まで進展させるのに、4次精度の Runge-Kutta-Gill 法を用いて時間きざみ $2h$ で計算した \mathbf{y}_1 と、 h で計算した \mathbf{y}_2 を用いると、真

の値 $f(t_0 + 2h)$ は

$$\begin{aligned} f(t_0 + 2h) &= y_1 + (2h)^5 \phi + O(h^6) \\ f(t_0 + 2h) &= y_2 + 2(h^5) \phi + O(h^6) \end{aligned} \quad (34)$$

と書き表すことができる. ここで, ϕ は $y^{(5)}(t)/5!$ の程度の大きさを持つ定数である. この y_1 と y_2 との2つの数値的評価の差

$$\Delta = y_2 - y_1$$

が大きすぎも小さすぎもしないように調整しなければならない. (34) の h の6次以上を無視すると,

$$\Delta = y_2 - y_1 = 30h^5 \phi$$

となるから, 刻み h_1 で計算した時の打ちきり誤差 Δ_1 を求め, 目標とする打ちきり誤差 Δ_0 を定めて適当な刻み h_0 を算出するには, 関係式

$$\left(\frac{h_0}{h_1}\right)^5 = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \quad (35)$$

から求めることができる. 本研究では, 打ちきり誤差を定めるのに, 粒子の移動速度を利用し, 無次元化された速度で小数点以下2桁まで求めるようにした. すなわち, 有効数字はおおよそ3桁となる.

実際の計算では, 安全のために, (35) で定められる h_0 より小さくなるように刻み幅をとっている.

$$\begin{aligned} h_0 &= Sh_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{0.20} && \Delta_0 \geq \Delta_1 \text{ のとき} \\ &= Sh_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{0.25} && \Delta_0 \leq \Delta_1 \text{ のとき} \end{aligned}$$

ここで, S は安全因子と呼ばれる定数で, 1より数パーセント小さい値である.

4 解析結果

4.1 計算条件

数値計算を行なう際には、固体粒子と流体との密度比 $\gamma = \rho/\rho_0$ およびレイノルズ数 Re の2つのパラメーターを与えることが必要であるが、以下の計算結果では、特に断りのない限り、 $\gamma = 1.2$, $Re = 0.0038$ を与えて計算している。これは、マグマ中を落下する結晶鉱物を想定したもので、以下のような物性値を仮定すると得ることができる。

固体粒子の密度	$\rho =$	3360	(kg/m ³)
粒子半径	$a =$	5	(mm)
流体の密度	$\rho_0 =$	2800	(kg/m ³)
粘性係数	$\mu =$	30	(Pa·s)
重力加速度	$g =$	9.8	(m/s ²)

ここから、代表的な長さを粒子の直径 $L = 2a = 1(\text{cm})$ 、代表的な速度を1粒子の落下終端速度 $U = 3.8 (\text{mm/s})$ としてレイノルズ数を算出した。またこの時、代表的な時間 T は $T = 2.74(\text{s})$ で、これは1粒子が終端速度で直径分を落下するのに必要な時間である。

まず、少数の粒子で数値実験を行なった結果を示す。この結果は、あとで多粒子系での結果を考える際に重要である。

4.2 1粒子のみの運動

1粒子のみの場合、粒子は終端速度 -1 で落下してゆく。このことは、代表的な速度を1粒子の終端速度としたことから、当然の結果といえる。図4に、粒子が終端速度で落下している時のまわりの流れの様子(流体の速度ベクトル)を示した。ストークス近似の特徴としてよく知られているように、流れは粒子の中心から上下対称な流れ場を形成している。また、速度ベクトルを見てわかるように、粒子の鉛直上方に他の粒子Bがある場合、その粒子はA粒子の中心方向に引き込まれる力をAから受ける。反対に粒子BがAより鉛直下方にある場合、BはAと反発する方向に力を受ける。

4.3 2粒子系での運動

2粒子系の場合、3次元上での運動でも、2粒子の中心を含み、かつ鉛直方向に方向ベクトルを持つ平面を考えることにより、2次元の問題に還元できる。よって、2粒子系の問題は、2次元上での回転系、非回転系の2種類のみとなる。

4.3.1 粒子の回転を考えない場合

図5のように2粒子の中心同士を結ぶ直線が、鉛直方向となす角が θ となるように粒子を配置し、落下させる。落下開始後すぐに2粒子とも同じ終端速度に達し、2粒子間の距離は一定に保たれたまま落下する。2粒子間の距離が変化しないのは次のように解釈できる。1粒子系の時の流れで見たように、ストークス近似においては、粒子の前後左右で流

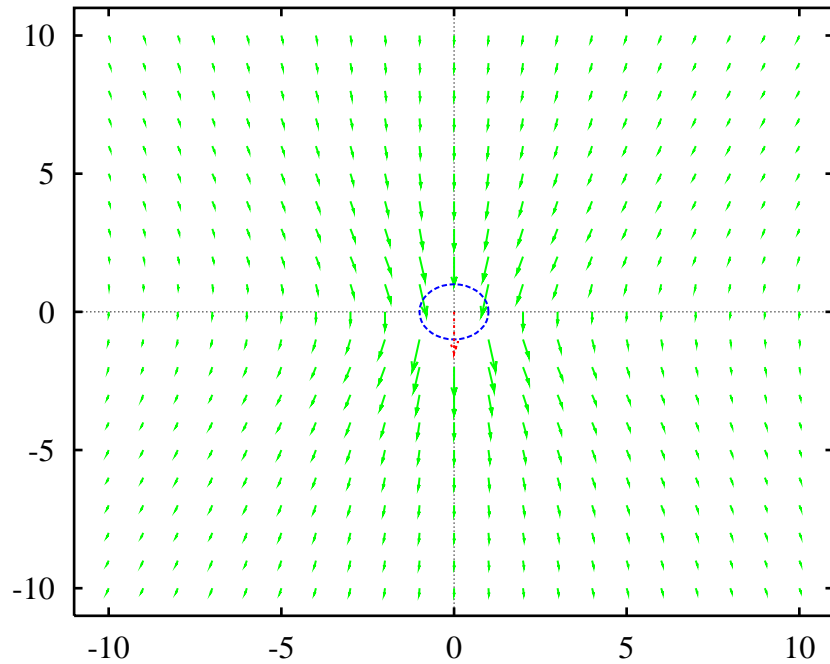


図 4: 粒子の周りの流体の流れ (1 粒子)

れが対称である．両者の速度が同じ場合，粒子AがBのまわりにつくり出す流れ場と，粒子BがAのまわりにつくり出す流れ場は等しい．従って粒子A，Bはともに相手粒子から同じ力を受けることになる．もし仮に粒子Aの方の落下速度が上がったとすれば，A自身はBよりも大きな粘性抵抗を受け，落下速度を下げるような力を受ける．またBはAから，大きな速度の擾乱を受け，Bの落下速度は大きくなる．どちらかの粒子の落下速度が低下した場合も同様な推察ができ，結局2粒子とも同じ速度を保つようになると考えられる．

図 6 に $\theta = 90^\circ$ の場合の粒子の落下速度を示す．粒子の半径はともに1，横軸の l は粒子の中心間距離で， $l = 2$ の時が2粒子が互いに接触していることを表している．縦軸の落下速度は，速度 -1 の時が1粒子の終端速度を表す．粒子間の距離 l が大きくなるほど相互作用が小さくなり，終端速度は -1 に漸近する．

図には実線と破線の2種類の結果が示されているが，実線が本研究の手法による終端速度，破線が Happel and Brenner (1973) による結果である．2粒子間の距離があまり小さくならない範囲では，両者はほぼ一致し，2粒子が非常に近い位置にある時でも近い値をとっていることがわかる．

次に粒子の配置と終端速度との関係を求めたグラフを図 7, 8 に示す．縦軸には終端速度を，横軸には2粒子が鉛直方向となす角の θ をとっている．2粒子間の距離が小さいほど相互作用が大きくなり，鉛直方向は落下速度が速くなり，水平方向の移動速度も大きくなる傾向がある．

(30) からわかるように，相手粒子の並進によって受ける並進力の大きさは，粒子間の距離に反比例する．

図 7 は鉛直方向の速度を，図 8 は水平方向の速度を表している．2粒子を鉛直方向に

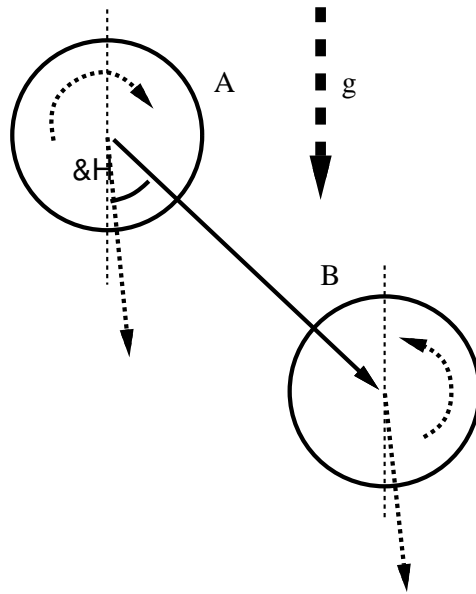


図 5: 2 粒子の位置関係.

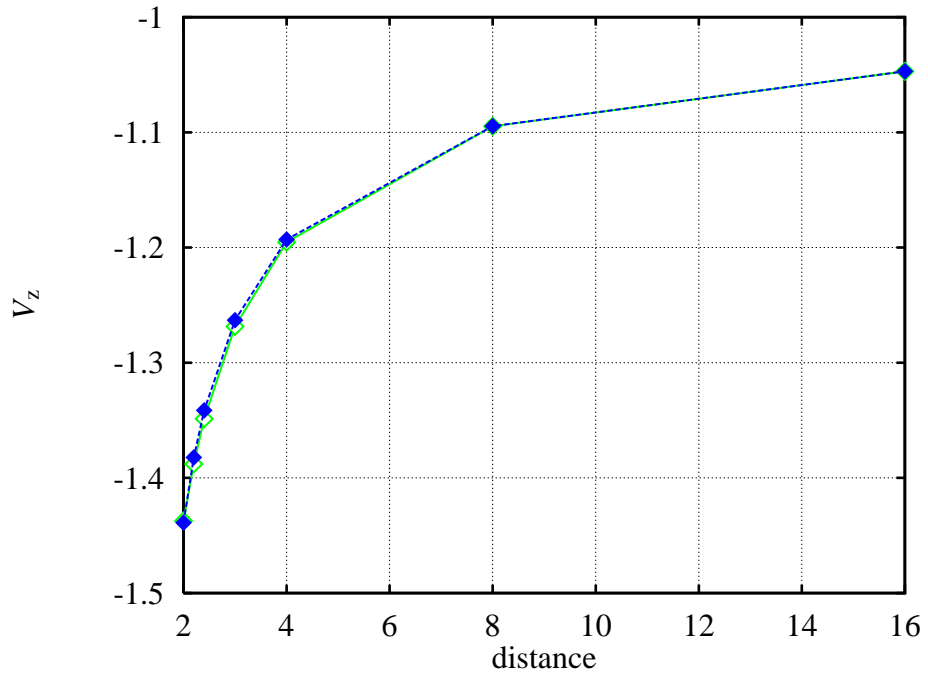


図 6: 2 粒子の落下終端速度 ($\theta = 90^\circ$) の計算結果 (実線). 破線は Happel and Brenner (1973) による.

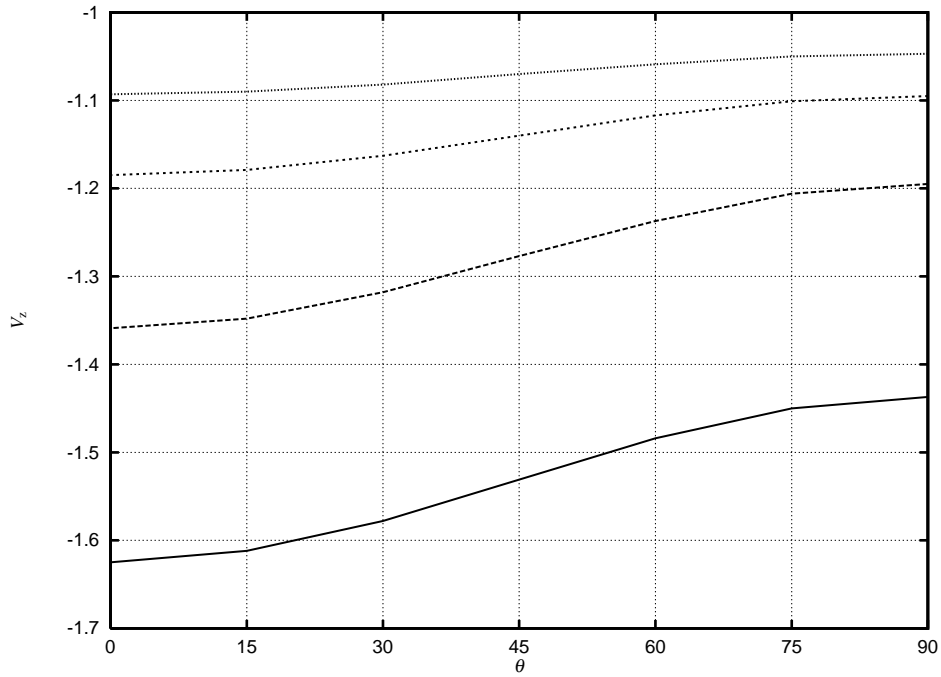


図 7: 終端速度の配置依存性 (鉛直方向). 粒子間の距離は上から順に $l = 16, l = 8, l = 4, l = 2$ (2 粒子が接触) である. 距離が近いほど相互作用が大きく, 落下速度は大きい.

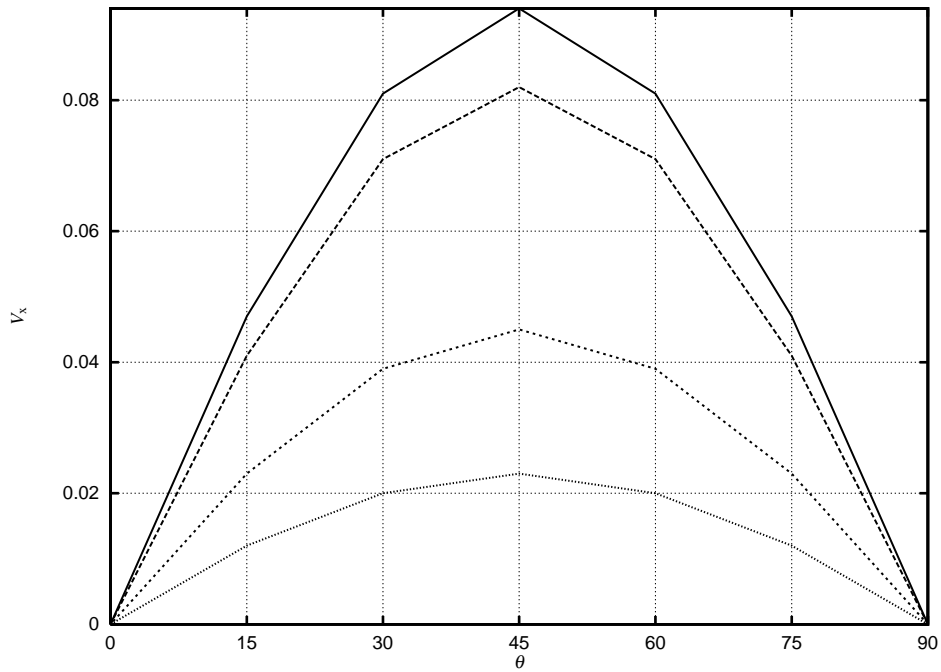


図 8: 終端速度の配置依存性 (水平方向). 粒子間の距離は上から順に $l = 2$ (2 粒子が接触), $l = 4, l = 8, l = 16$ である. これも距離が近いほど水平方向への運動速度が大きくなる.

配置した方が落下速度が速いのは、上方にある粒子のまわりの圧力は、下方にある粒子の通過によって低くなっており、受ける抵抗が小さくなって下降速度が速くなり、下方の粒子もその影響を受けて速く落下するためであると解釈できる。

粒子を鉛直方向、水平方向に配置した時には、水平方向への速度成分は生じない。水平方向への速度成分が最大になるのは、 $\theta = 45^\circ$ の時であることがわかる。また、この時の速度ベクトルが鉛直方向となす角は、 $l = 4$ の時 (2 粒子間に 1 粒子分入る距離) で、およそ 3.7° である。

4.3.2 粒子の回転も考慮した場合

粒子の回転も考慮した場合の 2 粒子の終端速度を図 10 に示す。これも $\theta = 90^\circ$ の場合で、実線は本研究の結果、破線は Happel and Brenner (1973) による結果を表している。Happel の方法では、粒子の回転を考慮すると終端速度がわずかに速くなるのに対し、本研究の手法では同じ傾向が見られるものの、変化は極めて小さい。このように、2 粒子が非常に近い位置にある時には、2 つの方法の間で終端速度にわずかな違いが見られる。

粒子の終端回転速度を図 11 に示す。縦軸には回転速度、横軸には粒子の中心間距離をとっている。

図 9 に示すように、粒子の回転方向は、相手粒子の落下する方向に回転する。これも実線が本研究による結果、破線が Happel and Brenner (1973) による結果である。粒子間の距離が小さい範囲で、本研究による結果の方が小さく見積もられているが、これは、落下の終端速度が小さく見積もられていることと関連すると考えられる。粒子間の距離が大きくなれば、やはり両者はほぼ一致する。

粒子の初期配置と終端回転速度との関係を図 11 に示す。2 粒子間の距離が同じならば、2 粒子を鉛直方向に配置した場合には粒子は回転を起こさず、水平方向に配置したときがもっとも速く回転する。(32), (33) からわかるように、粒子の回転は相手粒子の並進による速度の擾乱によって生じるものが卓越し、それは距離の 2 乗に反比例する。

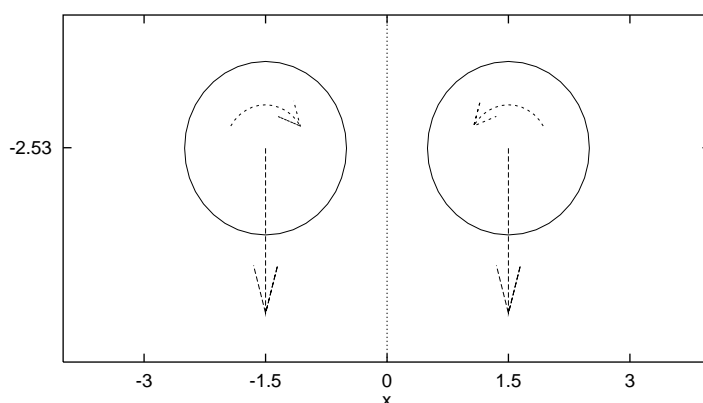


図 9: 2 粒子の回転方向

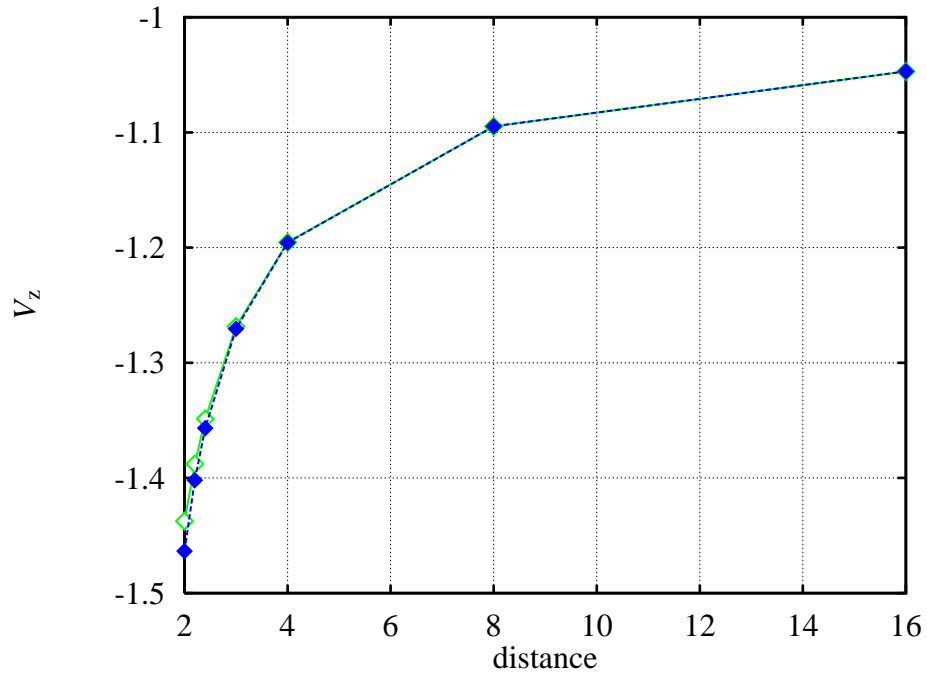


図 10: 粒子の回転も考慮した 2 粒子の終端落下速度 ($\theta = 90^\circ$). 破線は Happel and Brenner (1973) による.

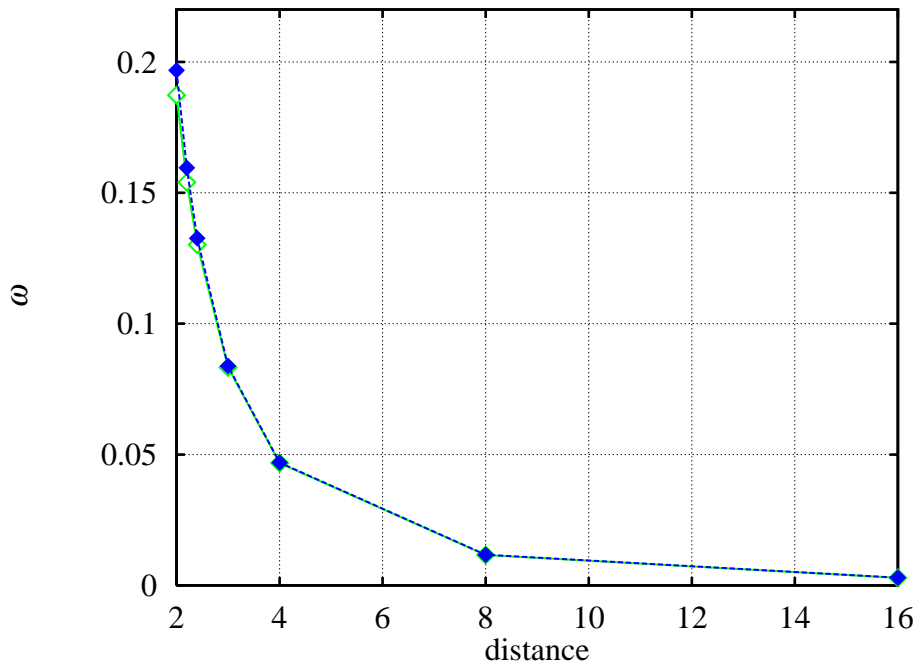


図 11: 2 粒子の終端回転速度 ($\theta = 90^\circ$). 破線は Happel and Brenner (1973) による.

4.4 3, 4 粒子系

2 粒子系では、粒子の配置に関わりなく、互いの位置関係が変化せず、定常的な落下運動を行なったが、3 粒子以上になるとごく特殊な初期配置を除いて互いの位置関係がさまざまに変化する。ここから得られるいくつかの特徴的な振舞いが多粒子系においても見られる。以下にいくつかの実験結果を示す。

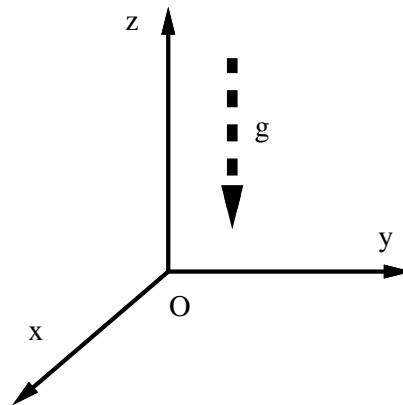


図 12: 3次元の座標系

4.4.1 3 粒子を同一水平面上で正三角形上に配置

3 粒子系ではこの配置のみが互いの位置関係を変えずに落下する。正三角形で、かつ同一の水平面上に配置されなければならないのは、それ以外の場合は、各粒子のおかれた場が対称でなくなり、流体を通して働く力に差が出るからである。

図 13 は、 z 軸正方向 (鉛直上方) から見た粒子の配置と、定常落下運動になった時の粒子の回転方向を示している。粒子の回転方向は 2 粒子系の時と同様、他の粒子が落下する方向に回転する。ここでは 3 粒子系のため、回転方向は他の 2 粒子間の方向、すなわち正三角形の重心の方向である。

4.4.2 水平面上で一直線に配置

図 14 は、 y 軸負方向から見た粒子の初期配置である。真中に配置された球が、他の 2 粒子との距離が近いため、相手粒子から受ける相互作用がもっとも大きく、最も大きな速度で落下を始める。両端の 2 粒子は、2 粒子系の時と同じ方向に回転しながら、互いに引き寄せられる方向に移動する (図 15)。

4.4.3 鉛直方向に一直線に配置

図 16 は y 軸負方向から見た粒子の初期配置である。この場合も水平面上に配置した時と同様な理由により、始めは真中の粒子がもっとも速く落下し、一番下の粒子に接近する。

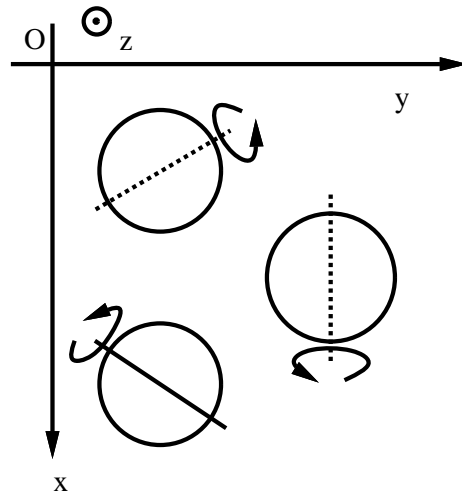


図 13: 3 粒子系を水平な直線上に配置した時の回転方向

真中の粒子は下側の粒子と強い相互作用を及ぼし合いながら一番上の粒子よりも速い速度で落下するため、一番上の粒子は取り残され、二粒子と一粒子に分離する (図 17)。これとよく似た現象が、運動を二次元平面上に限った多粒子系の運動で見ることができる。

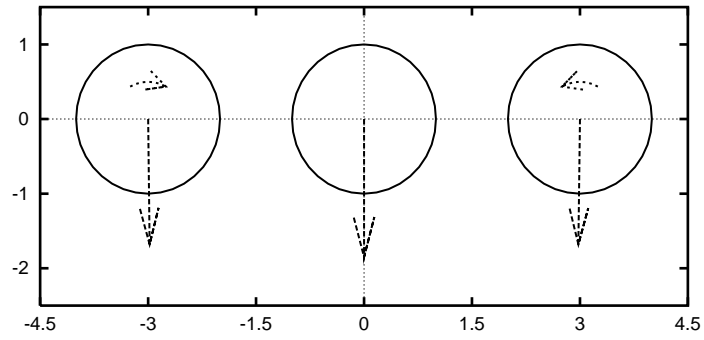


図 14: 3 粒子を水平に一直線に配置した時の速度と回転方向

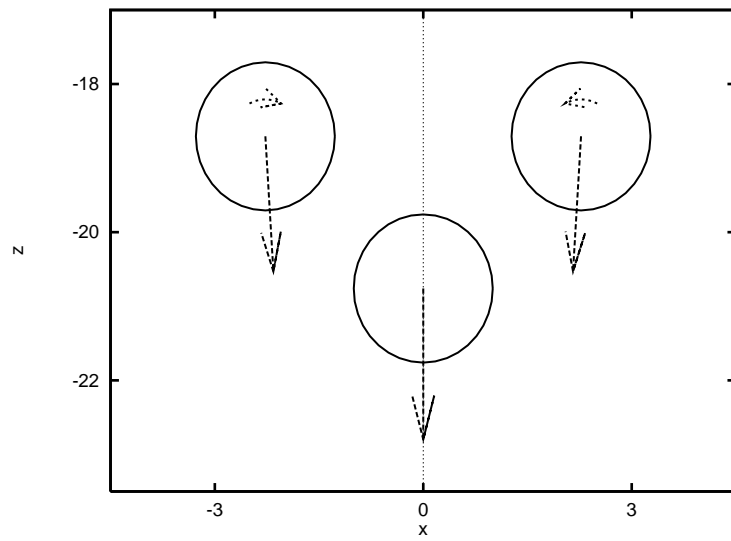


図 15: $t = 13$ における粒子の配置, 両端の粒子は互いに接近する.

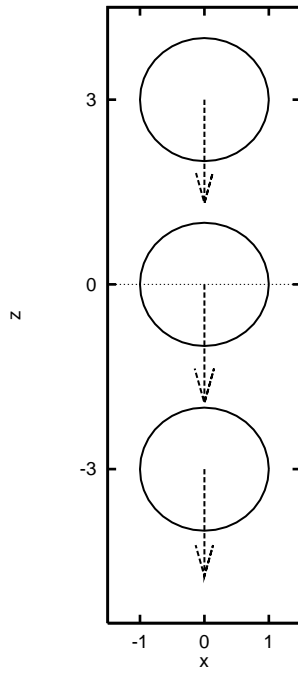


図 16: 3 粒子を鉛直方向に 1 直線に配置した時の速度.

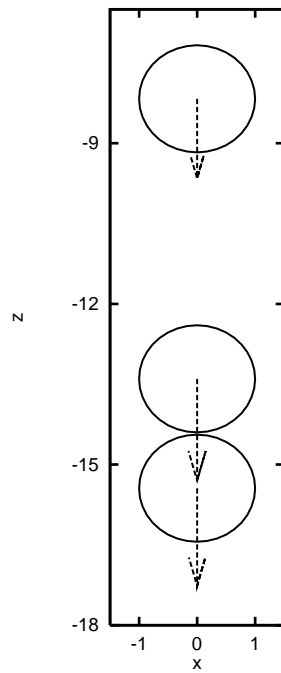


図 17: $t = 7$ における粒子の配置. 下方の 2 粒子だけ速い速度で落下する.

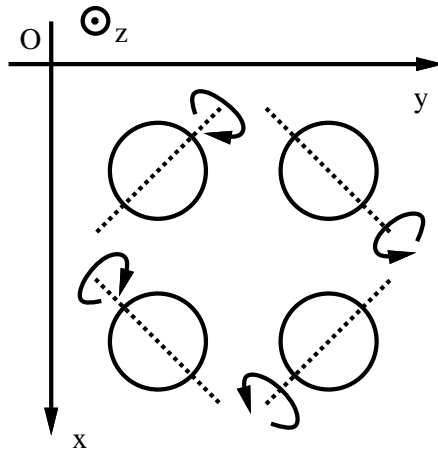


図 18: 4 粒子を水平面上に配置した時の回転方向

4.4.4 4 粒子を同一水平面上で正方形に配置

3 粒子系の時と同じく，落下の途中で粒子間の位置関係が変化しないようにするためには，4 粒子を同一水平面上に対称に配置しなければならない．すなわち 4 粒子の場合は，正方形上に配置することになる．また，粒子の回転方向は，これまでと同様に，鉛直上方から見て相手粒子のある方向，4 粒子の場合は 図 18 のように対角方向の粒子の方向に回転する．

4.4.5 鉛直平面上で正方形に配置

図 19 は， y 軸負方向から見た粒子の初期配置である．この系でも，図 20, 21 のように鉛直上方の粒子が速く落下し，下方にある粒子に追いつくが，下方の粒子は外側に追い出され，上方から来た粒子が追い越してしまう．その結果，粒子の上下が入れ替わり，初期の配置と同じ状態に戻る．その後も同様な繰り返しが続き，個々の粒子の回転に加えて，粒子の集団全体が回転運動を行なうようになる．図 22 は，4 粒子が落下していく時の粒子の中心がたどる軌跡および速度ベクトルを $t = 10$ ごとに示したものである．図 24 は，それを 4 粒子の重心からみた時の軌跡である．ただし， x 成分が正の粒子 2 つと負の粒子 2 つは，それぞれ全く同じ軌跡を描くので，ここではそれぞれ一方のみを描いている．この図からわかるように，粒子は 'へ' の字型を描きながら，元の位置に戻るといふ周期運動を繰り返している．

しかしながら，このような周期的な運動は，粒子をきわめて規則的かつ対称に配置した時に限られる．少しでも対称性が崩れると，集団はただちに崩壊する．図 23 は，図 19 の初期配置から 1 粒子だけを鉛直上方にわずかにずらして落下させた時の粒子が描く軌跡である．ほぼ対称な初期配置であるにも関わらず，集団全体がおよそ 1 回転するうちに対称性がくずれ，落下の先頭に 2 粒子，そこから遅れて 1 粒子ずつが落下するようになる．これと同じ現象が，多粒子系の場合でも見られる．

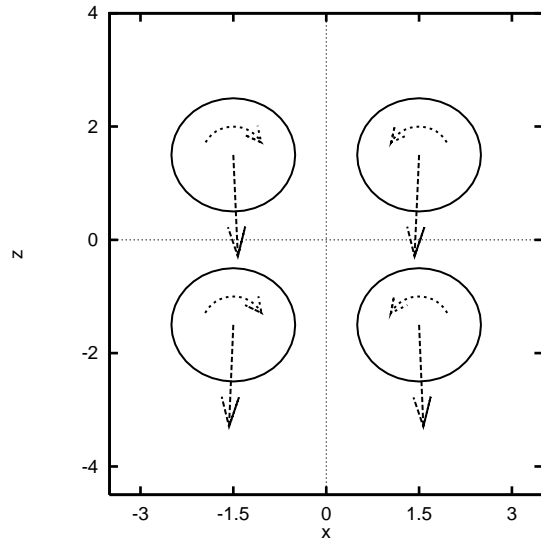


図 19: 4 粒子を鉛直平面上に並べた時の初期配置

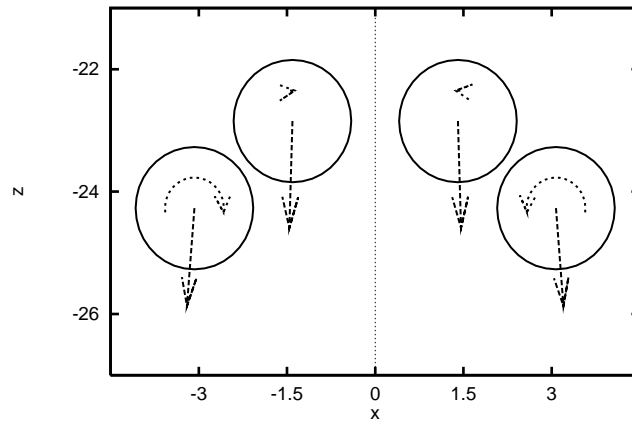


図 20: $t = 12$ の時の配置. 上方の粒子が追いつき, やがて追い抜く.

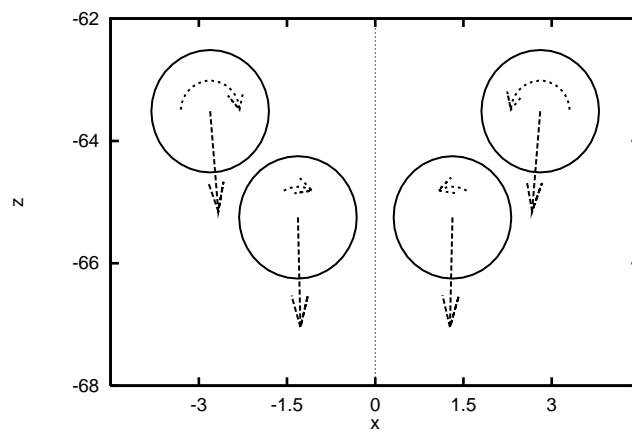


図 21: $t = 35$ の時の配置. 上方の粒子が追い抜いて, 再び元の配置に戻る.

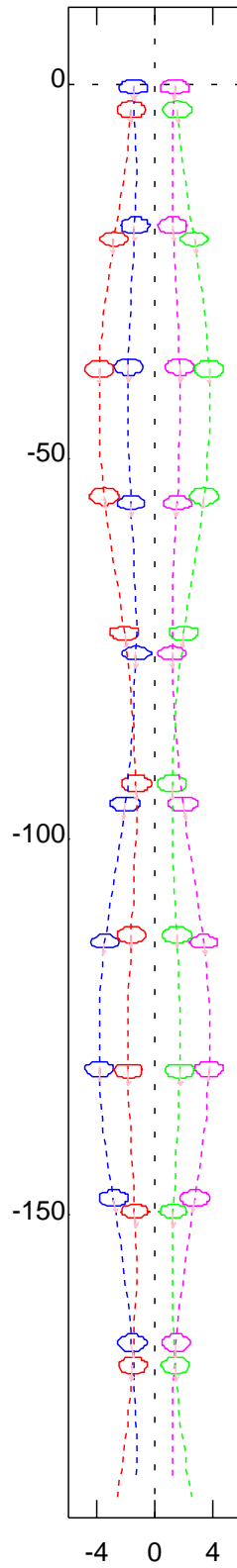


図 22: 4 粒子が落下中にたどる軌跡. 集団は, 右側 2 粒子は反時計まわり, 左 2 粒子は時計回りに回転する.

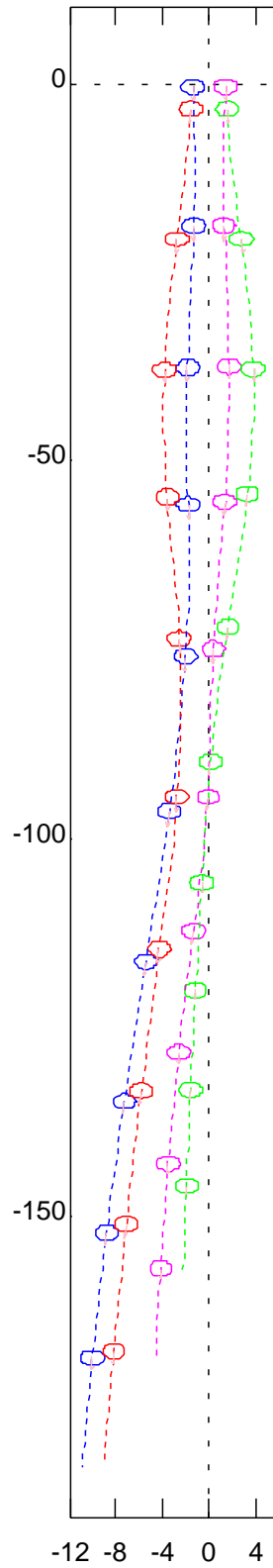


図 23: 初期配置を 1 粒子だけわずかにずらした場合. 回転運動が長時間持続せず, 集団が分離する.

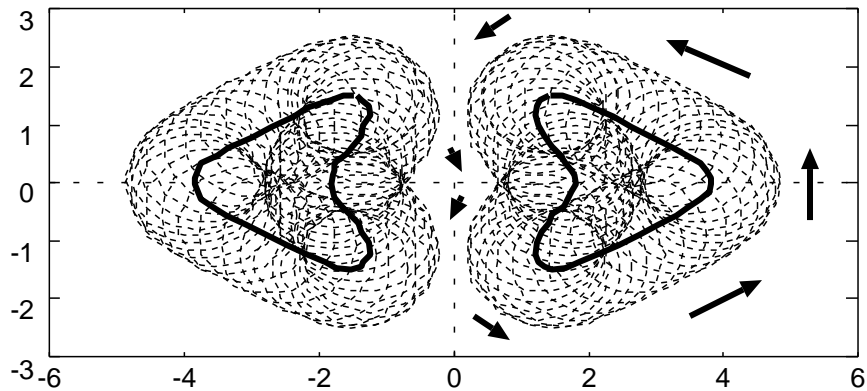


図 24: 重心系で, 4 粒子が落下中にたどる軌跡

4.5 多粒子系

4.6 2次元平面上での運動 (非回転系)

粒子の初期配置および運動領域を2次元平面上に限ると, 3次元とは異なった2次元特有の振舞いを示す. 3次元の問題では, 4粒子系で現れたような集団の回転運動が起こるのに対し, 2次元の問題では, そのような現象が起こらず, 集団は徐々に分離する.

図 25, 26 に2種類の初期配置を示す. 図 25 は無限平面上にある矩形領域を設定し, 規則的に配置したもの, 図 26 は, 同じ領域に粒子をランダムに配置したものである. なお, この実験では, 粒子の回転は考えていない.

落下開始後, 集団の中ほどに位置していた粒子は, 上端, 下端の粒子から大きな相互作用を受けて下方の粒子に追い付く. これにより下方での粒子の分布密度が大きくなり, 上方の粒子より大きな速度で落下する. その結果, 上方の粒子は取り残され, 全体として落下の先頭(下端)より少し上のあたりで分布密度が最大になり, 上方にいくにしたがって分布密度が小さくなってゆく.

図 27 ~ 30 は縦軸に鉛直方向の座標, 横軸に粒子の分布密度を示した分布関数である. この分布は, 指数関数的な形をしており, 分布関数 $f(z) = Ax^b \exp(-\frac{z}{c})$ への当てはめを非線形最小乗法で試みたものが, それぞれ 図 27 ~ 30 の破線で描かれたものである. 落下開始直後から集団が分離し始めるため, 初期配置が異なっても, 分布関数は非常に似通ったものになることがわかる. すなわち, 2次元問題では粒子の初期配置依存性は小さい. これは3次元問題と著しく異なる点である.

4.7 3次元空間上での運動

粒子の運動が3次元空間上になると, 粒子間の相互作用が大きくなるため, 2次元問題とは異なるふるまいを示す. 基本的には, 4粒子系で見られたような集団の回転運動が, 局所的, 大域的な範囲の両方で起こる.

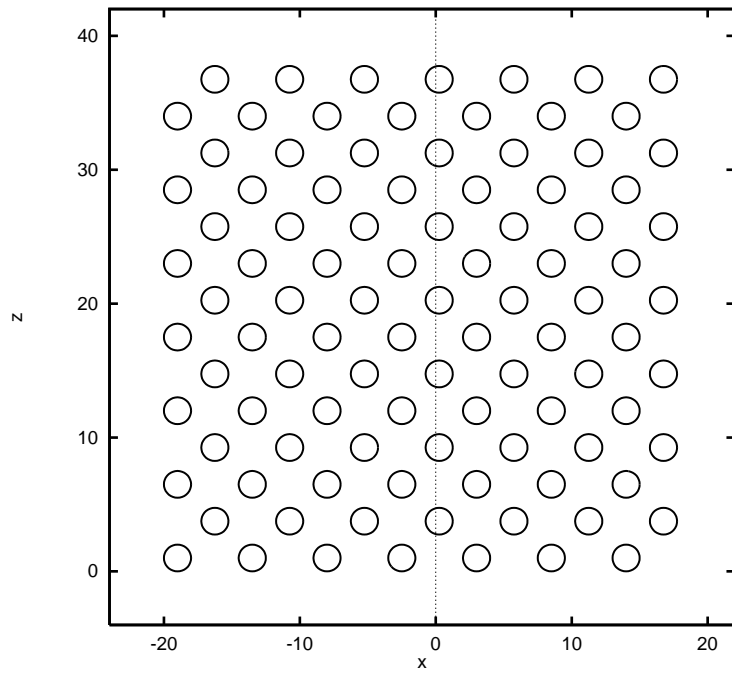


図 25: 規則的な配列の初期配置

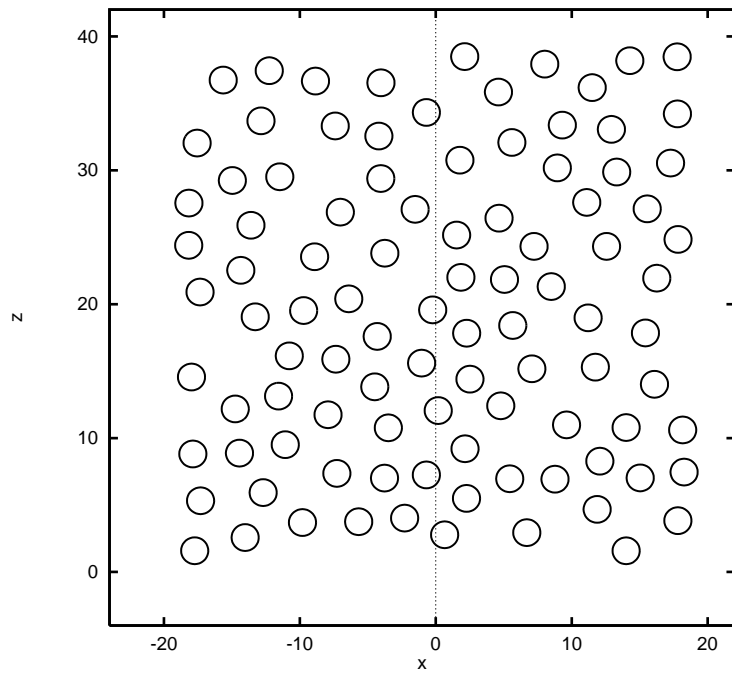


図 26: 不規則な配列の初期配置

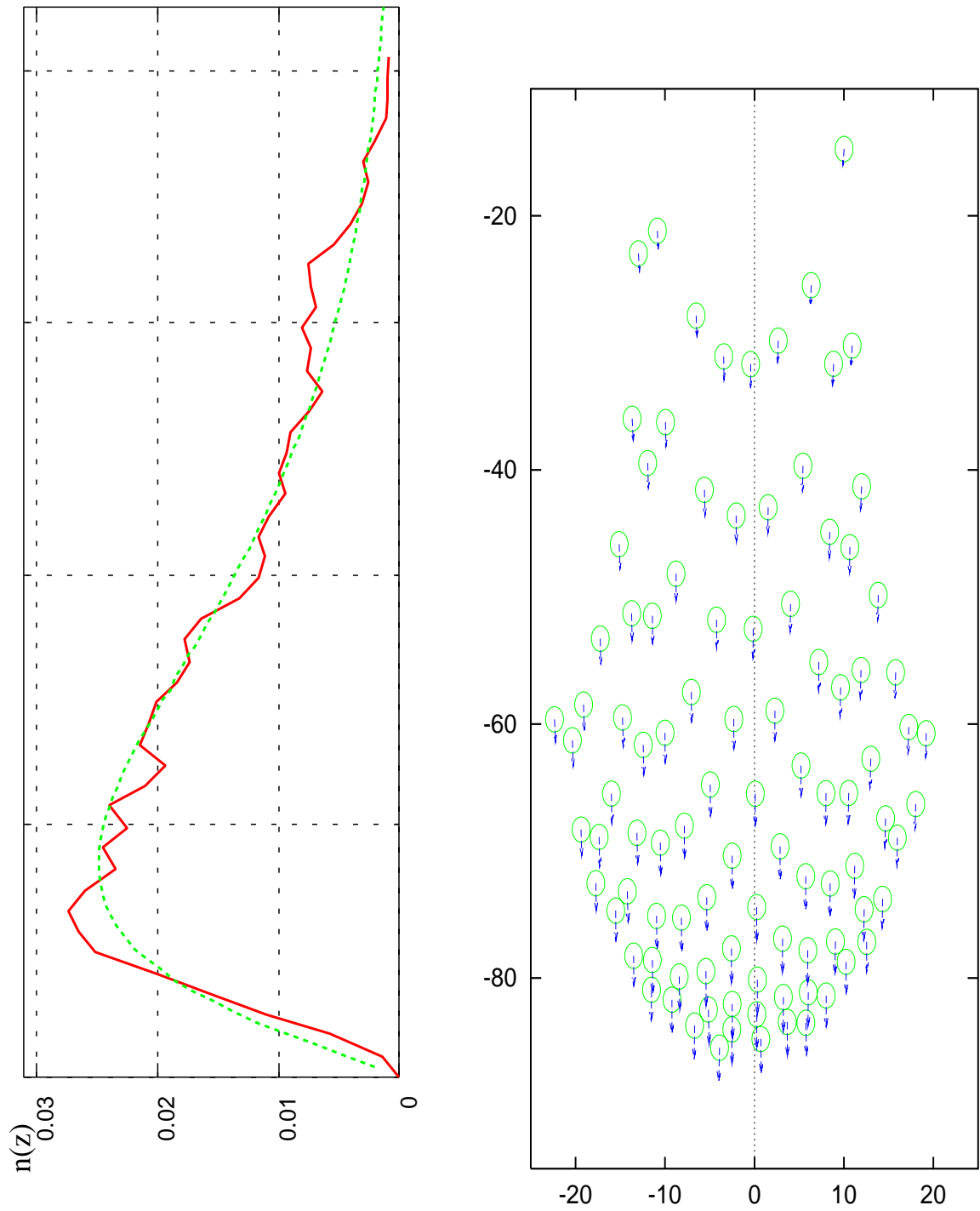


図 27: 規則的な配置からスタートし, $t = 10$ における粒子の配置

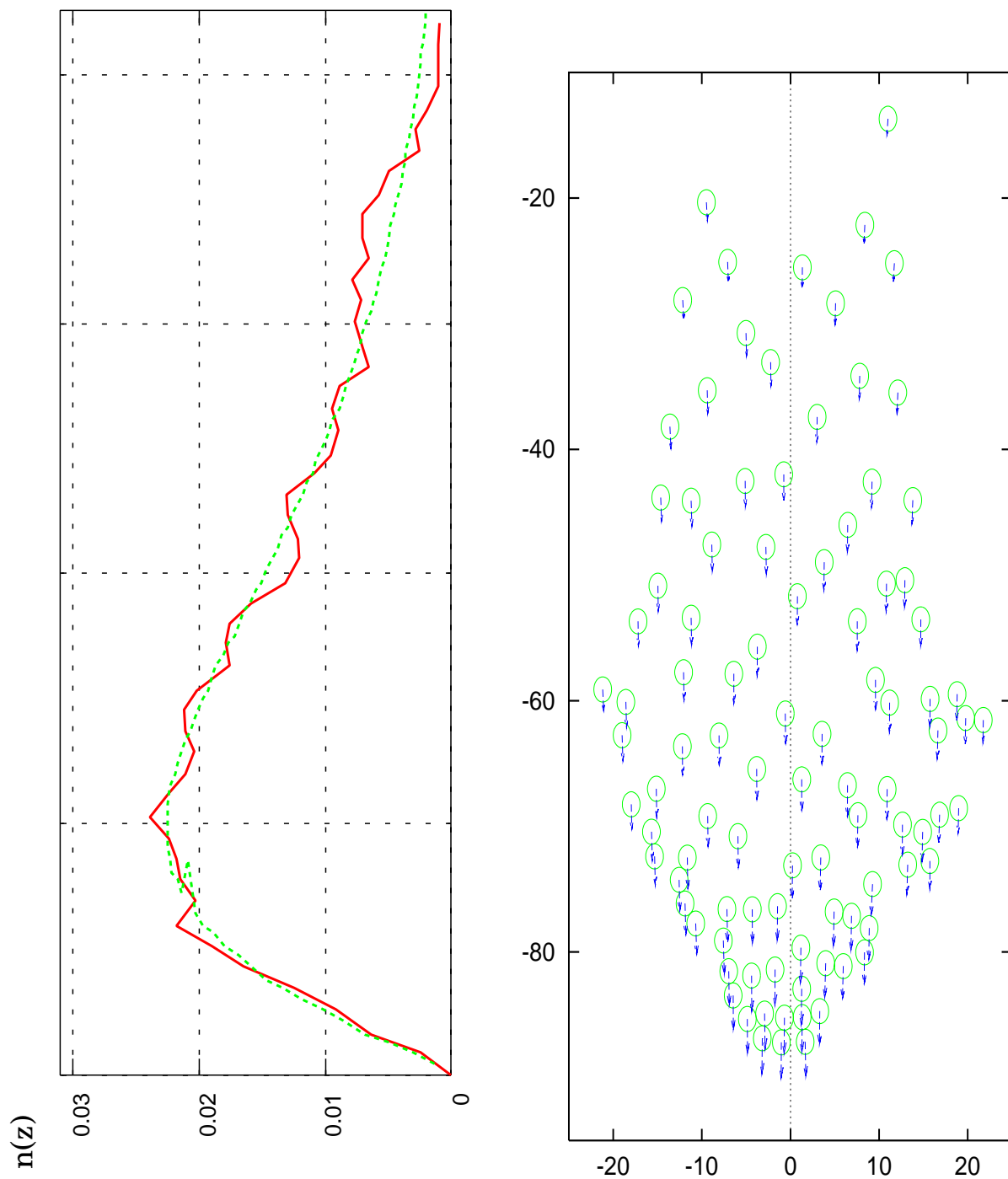


図 28: ランダムな配置からスタートし, $t = 10$ における粒子の配置

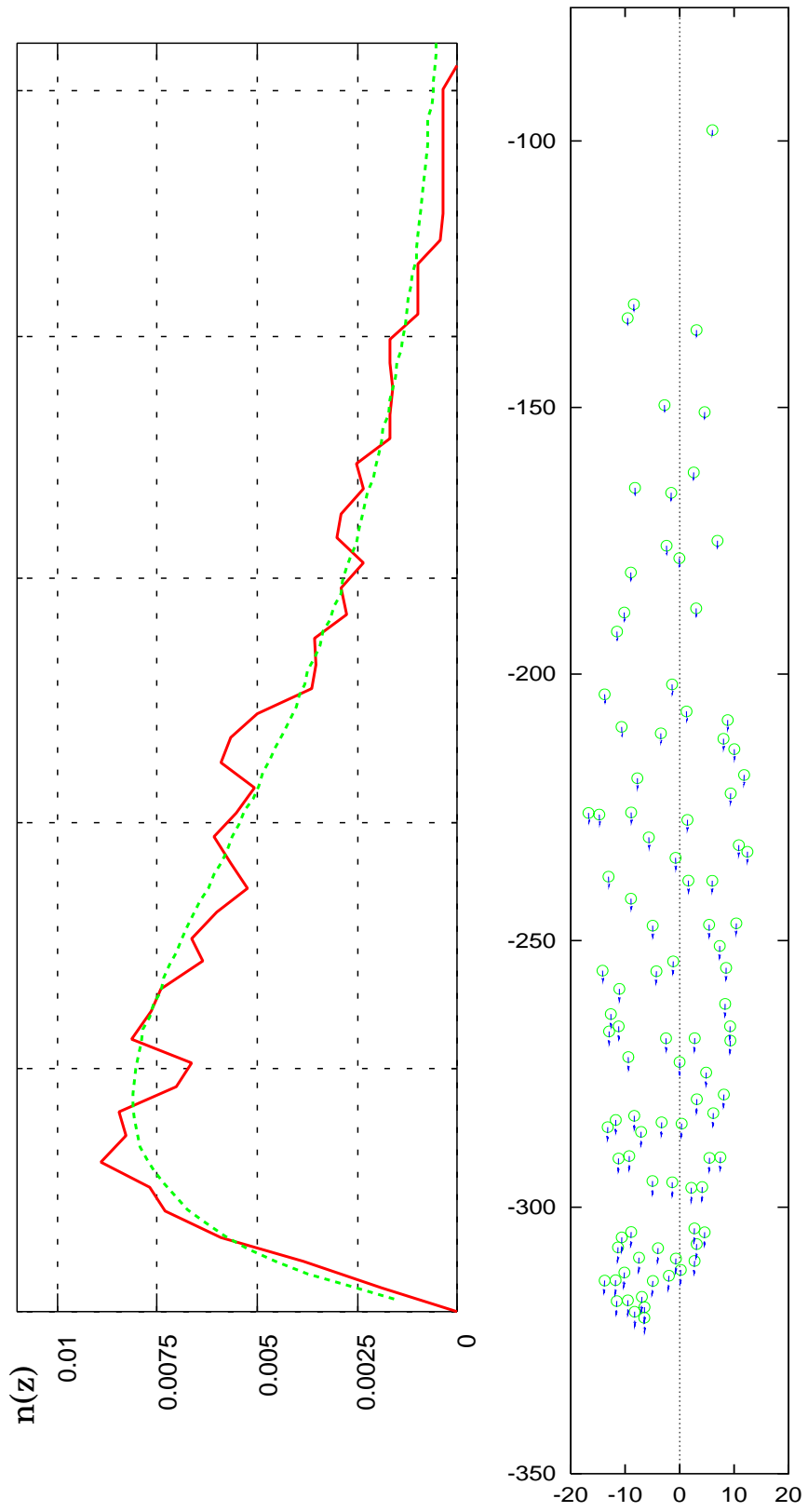


図 29: 規則的な配置からスタートし, $t = 40$ における粒子の配置

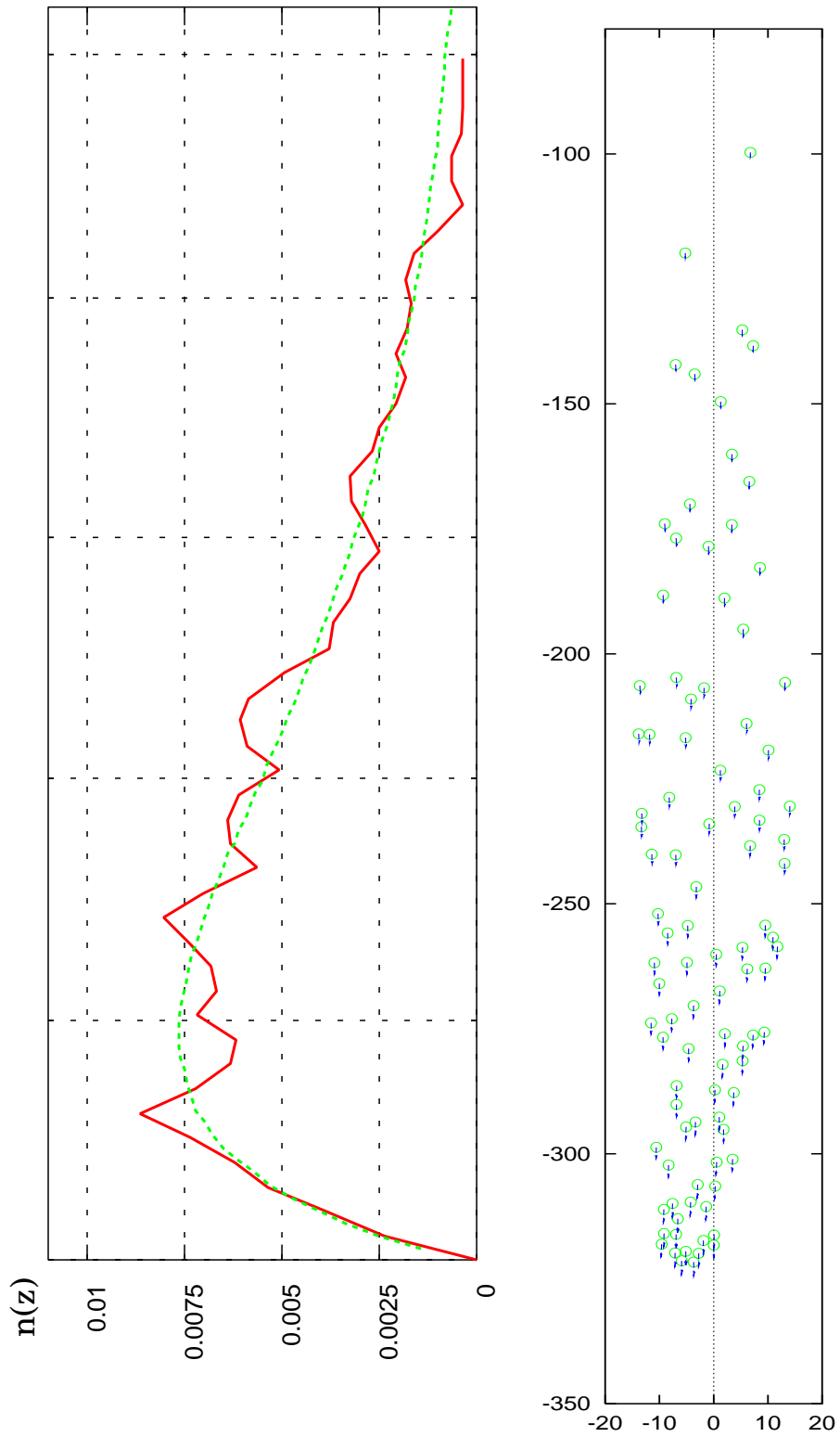


図 30: ランダムな配置からスタートし, $t = 40$ における粒子の配置

4.7.1 少数粒子系

まず、基本的な振舞いをみるため、立方体の各頂点に粒子を1つずつ、計8個配置したものを実験を行なった。図31は、その初期配置を y 軸負方向から見たものである。座標軸のとり方は、図12のように直交右手座標系である。図では4粒子しか見えていないが、裏側にも同じ位置に各1粒子ずつ存在している。

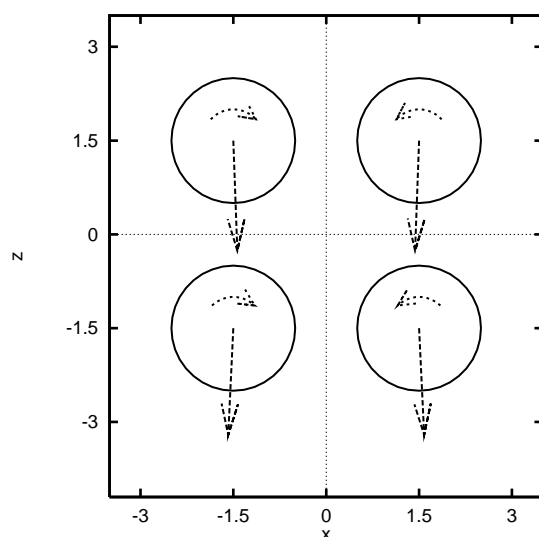


図 31: 8 粒子系の初期配置を y 軸負方向から見たもの。

隣接する粒子間の距離は4粒子系で行なったものと同じである。落下開始後、4粒子系と同様な回転運動を行ないながら落下してゆくが、1回転に要する時間、すなわち周期が4粒子系に比べて非常に短い。

図32に、4粒子系と8粒子系について、初期の隣接粒子間距離と集団の回転の周期との関係を表したものを示す。

4粒子系(2次元的な配置)においては、8粒子系(3次元的な配置)に比べて相互作用が弱く、回転の速度が遅くなる。図32では、粒子間の距離があまり離れていない場合を描いてあるが、8粒子系では、周期が距離のおよそ2乗に比例し、4粒子系ではおよそ2.8乗に比例している。

4.7.2 多粒子系

章の始めに述べたように、集団としての回転運動が、局所的な範囲と大域的な範囲の両方で起こる。すなわち、集団全体が回転運動を起こし、さらに周辺の数粒子だけでも回転運動を起こす。粒子の配置が規則的であるほど大域的な回転運動が長時間持続する。

はじめに、規則的な配置からスタートしたものを示す。

図33および34は、空間上の正方格子に規則的に粒子を32個配置したものであり、初期の粒子間距離が図33の方が図34より2倍大きくなっている。粒子間距離が大きい方が、粒子間の相互作用が弱いと、集団の回転で一周の長さが長いと、一回転に要す

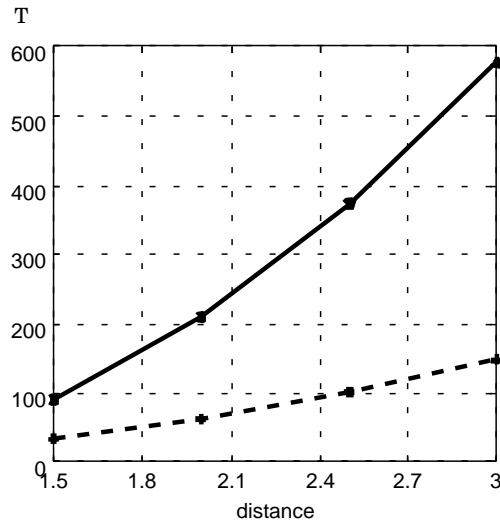


図 32: 集団の回転周期の距離依存性. 実線は 4 粒子系 (2 次元的な配置), 破線は 8 粒子系 (3 次元的な配置) を表す.

る時間は長くなる. 図 33 について, 落下開始後の粒子の軌跡を y 軸負方向から見て描いたものが, 図 38 である. ただし, 速度ベクトルは重心系から見たものを描いてある. また, z 軸正方向, すなわち鉛直上方から見たものを描いたものが, 図 37 である.

図 38 は y 軸負方向から見た時の粒子の時間変化を示している. $t = 30, t = 90$ の配置については, 拡大図と重心系から見た流体の流れを示してある. 図 38 からは 16 粒子しか見えないことからわかるように, 集団は x 軸, y 軸方向への対称性を保ったまま落下し, かつ図 37 からは粒子はほぼ同一平面上を動きながら落下していることがわかる. 32 粒子の中の, 初期配置の x, y, z 成分がもっとも大きい粒子について, 重心系から見た座標成分 x, y, z , 速度成分 V_x, V_y, V_z および角速度成分 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ を $t = 10$ 毎に表 1 に表した. 角速度の z 成分がほぼ 0 のままであるのは, 図 37 から粒子が同一平面上を運動していることと調和的である.

やがて一部の粒子が集団から離れ, 残った粒子だけで回転運動を続ける.

次に, ランダムな配置からスタートしたものを示す.

図 35 および, 図 36 は, それぞれ図 33 および 図 34 と平均の粒子間距離がほぼ等しい初期配置である. 落下開始直後から集団全体が回転運動を行なうが, 一部の粒子が直ちに集団から離れ, 遅れて落下するようになる.

図 39 に, ランダムな初期配置からスタートした時の初期配置, $t = 20, t = 80$ の時の配置について, さらに $t = 20, t = 80$ については, 集団内で回転運動を継続している粒子についての拡大図と, 重心系から見た周りの流体の流れも示した. 集団から遅れてしまった粒子はもはや集団としての回転運動は起こらなくなる. その後, 残りの粒子で回転運動を行なうが, 再び一部の粒子が集団から離れ, 以降その繰り返しのより, 少しずつ粒子が集団から脱落してゆく.

図 36 ぐらいに粒子間の距離が大きくなり, 相互作用が小さくなると, 集団全体が 1 回転もしないうちに集団が崩壊する. その運動の様子は, 相互作用の弱い 2 次元平面上での

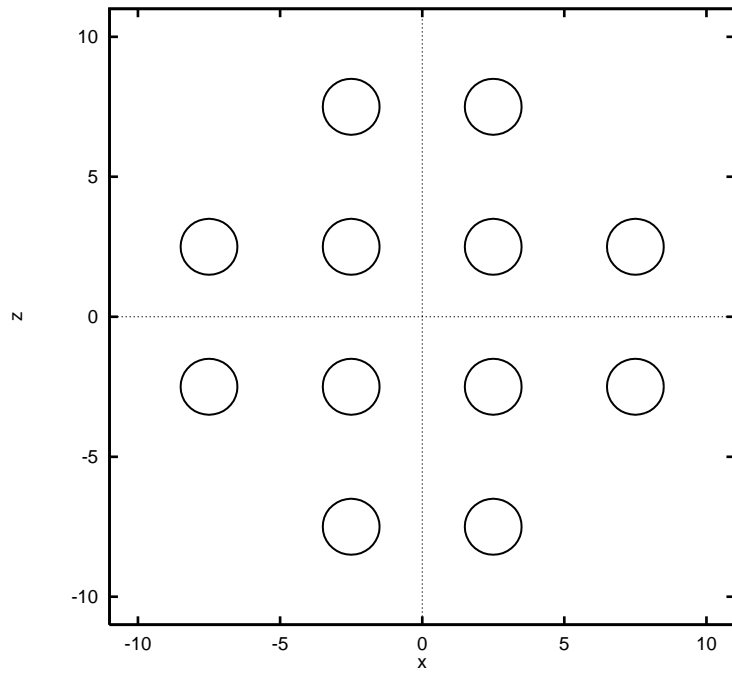


図 33: 3次元上での規則的な初期配置 (32 粒子, 粒子間隔 $d = 5.0$)

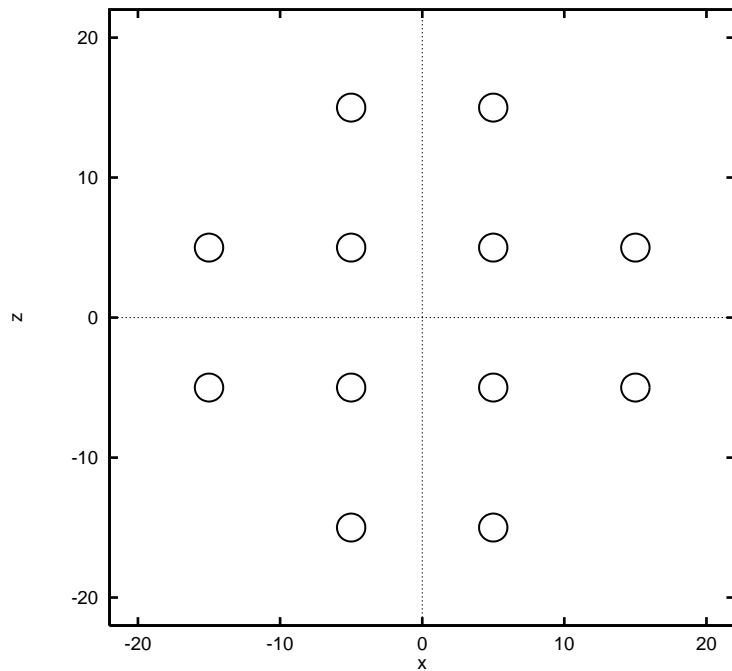


図 34: 3次元上での規則的な初期配置 (32 粒子, 粒子間隔 $d = 10.0$)

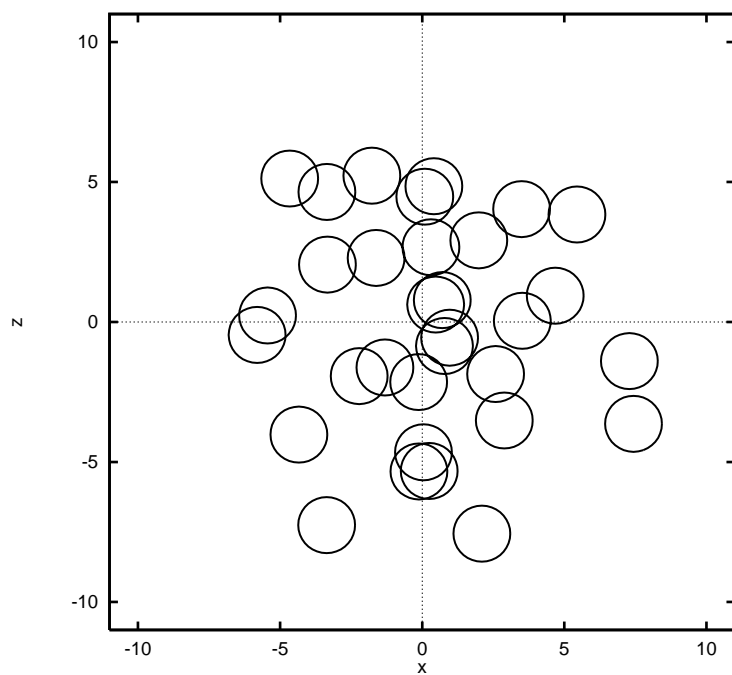


図 35: 粒子を空間にランダムに配置した時の初期配置

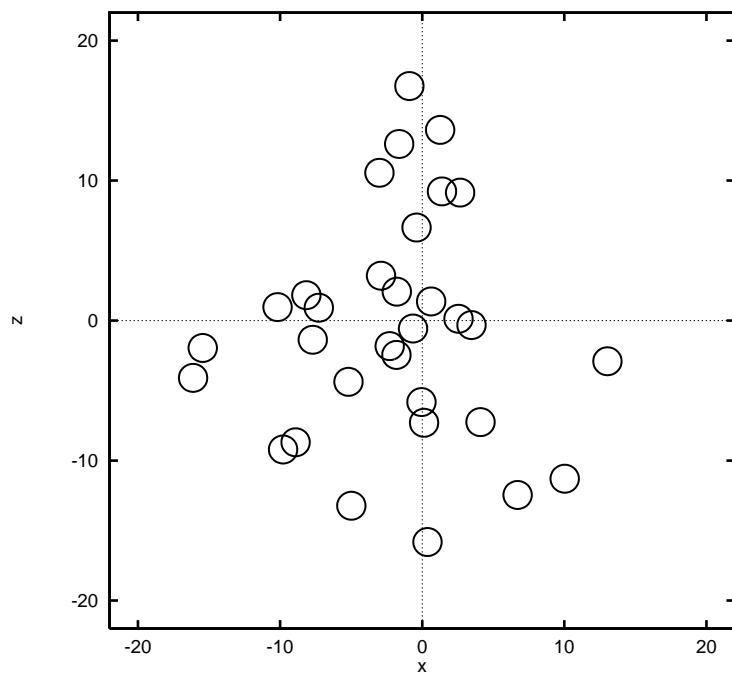


図 36: 粒子間の平均距離を大きくして、空間にランダムに配置した時の初期配置

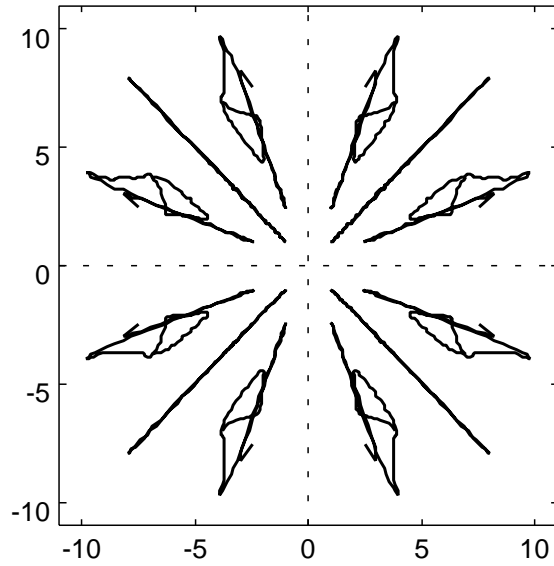


図 37: 粒子の中心を z 軸正方向から見た時の時間変化. 粒子はほぼ同一平面上を運動する.

t	x	y	z	V_x	V_y	V_z	ω_x	ω_y	ω_z
0	-7.500	-2.500	-2.500	0.000	0.000	-1.000	0.000	0.000	0.000
10	-8.201	-3.013	-41.502	0.051	-0.012	-3.769	-0.088	0.194	0.000
20	-4.694	-1.815	-81.810	0.367	0.127	-4.470	-0.061	0.130	-0.000
30	-2.586	-1.082	-129.558	0.124	0.052	-5.265	-0.092	0.254	0.000
40	-2.860	-1.140	-182.521	-0.072	-0.024	-4.933	-0.099	0.200	-0.000
50	-4.595	-1.810	-227.941	-0.286	-0.110	-4.168	-0.054	0.112	-0.000
60	-8.209	-3.161	-266.323	-0.343	-0.145	-3.518	-0.046	0.128	0.000
70	-9.576	-3.895	-299.328	0.136	0.038	-3.302	-0.053	0.129	0.000
80	-8.357	-3.713	-334.269	0.082	-0.013	-3.552	-0.032	0.100	-0.000
90	-7.308	-3.773	-370.282	0.057	-0.028	-3.640	-0.007	0.087	0.000
100	-6.233	-3.519	-406.382	0.163	0.096	-3.639	0.031	0.061	-0.000

表 1: 粒子の回転も考慮した場合の粒子Aの座標, 速度, 角速度の時間変化. A: 初期の位置が $(x, y, z) = (-7.5, -2.5, 7.5)$

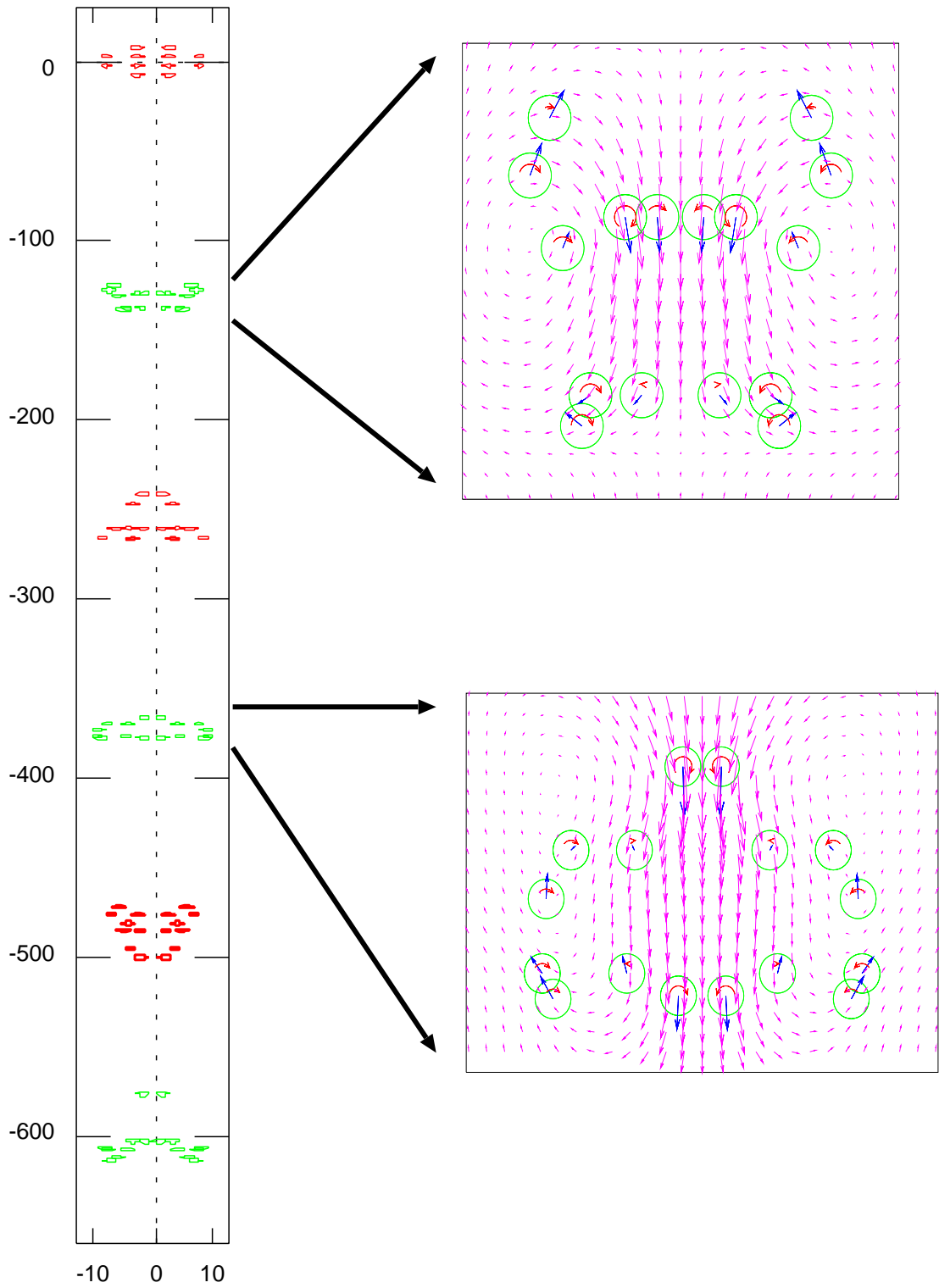


図 38: 規則的な配置からスタートした時の粒子配置の時間変化. $t = 30$ 毎に示した.

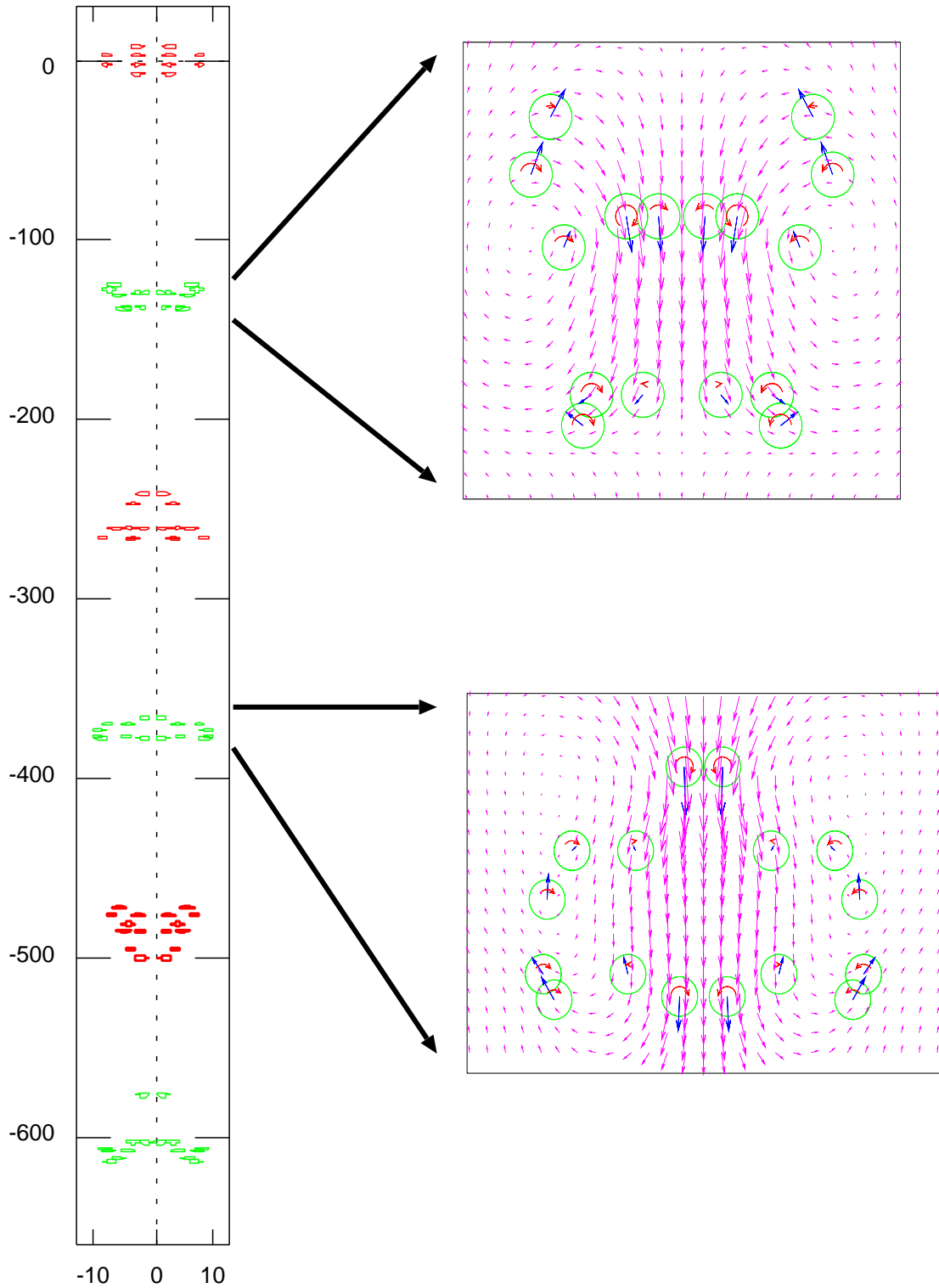


図 39: 粒子をランダムに配置した時の集団の配置の時間変化とその拡大図. 赤は $t = 0$, 緑は $t = 20$, 青は $t = 80$ の時の配置を表す.

運動に類似している。

配置の規則性によって集団が崩壊するまでの時間が異なるが、これは重心系で粒子の周りに生じる流体の流れを見るとその原因がわかる。図 40 および図 41 に、 $t = 5$ における重心系から見た流れを、 $x - z$ 平面 $y = 0$ で見たものを示す。ただし、粒子は y 軸負方向から見たすべての粒子を示してある。両者は初期の粒子間の平均距離はほぼ等しいが、特に集団上部での流れに相違点が見られる。配置が規則的な場合は、集団上部での流れのベクトルが、集団の中心方向を向いており、これは集団の上部に来た粒子は再び中心方向に引き戻されることを意味する。これに対し、不規則な配置の方は、集団上部での速度ベクトルは中心方向ではなくむしろ鉛直上方を向いており、集団の上部に来た粒子は中心方向に引き戻されにくいということがわかる。

4.7.3 粒子の数密度と落下速度

粒子の分布密度が大きいと、粒子間の平均距離が小さくなり、粒子同士の相互作用が大きくなり、落下速度が増大する。図 42 は、規則的な配置で計算を開始した時の $t = 5$ における粒子の平均落下速度と数密度との関係を示している。数密度は、図 33 における数密度を 1 とし、横軸は対数軸をとっている。計算は 4 サンプルのみであるため細かなデータは得られていないが、図からは、数密度の大きい部分では落下速度が、1 粒子単独の落下速度の 10 倍近くにもなり得ることがわかる。

4.8 粒子の回転の有無による振舞いの違い

本研究における個々の粒子の回転は、流れ場にほとんど影響をおよぼさない。表 2 に、個々の粒子の回転を考えないで計算を行なった時の座標成分 x, y, z および速度成分 V_x, V_y, V_z が示してある。回転を考慮した場合の表 1 と比較しても、ほとんど違いがないことがわかる。

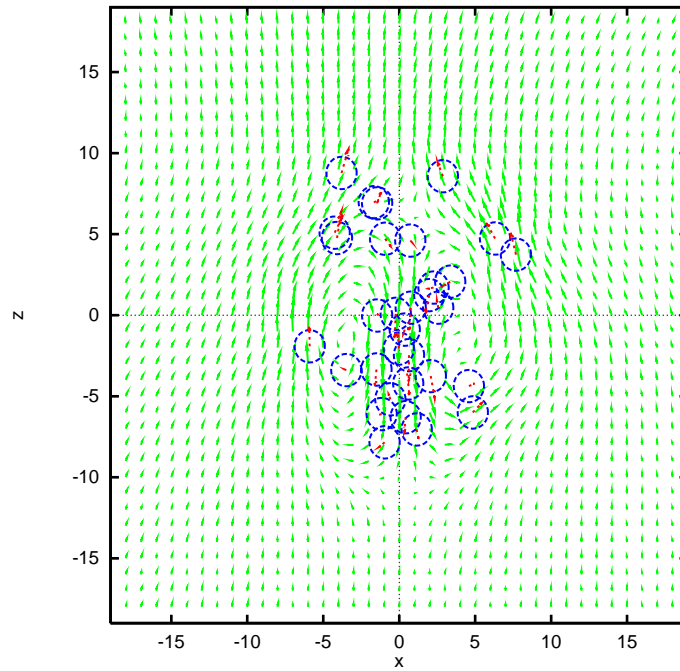


図 40: 粒子の配置が規則的な場合の重心系から見た流れのパターン. 粘性流体中を落下する液滴の流れ (Batchelor 1984) に類似している.

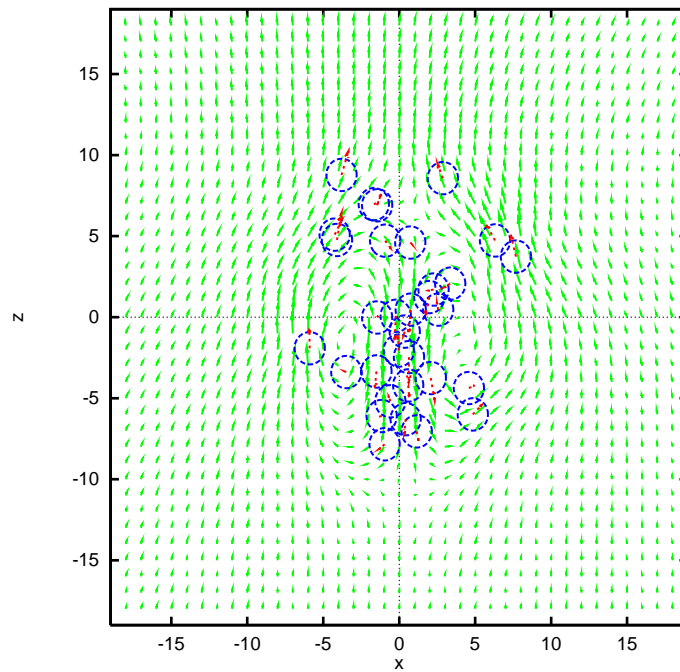


図 41: 粒子の配置がランダムな場合の重心系から見た流れのパターン. 規則的な配置に比べ, 速度ベクトルが不揃いで特に上方で粒子を巻き込むような流れが少ない.

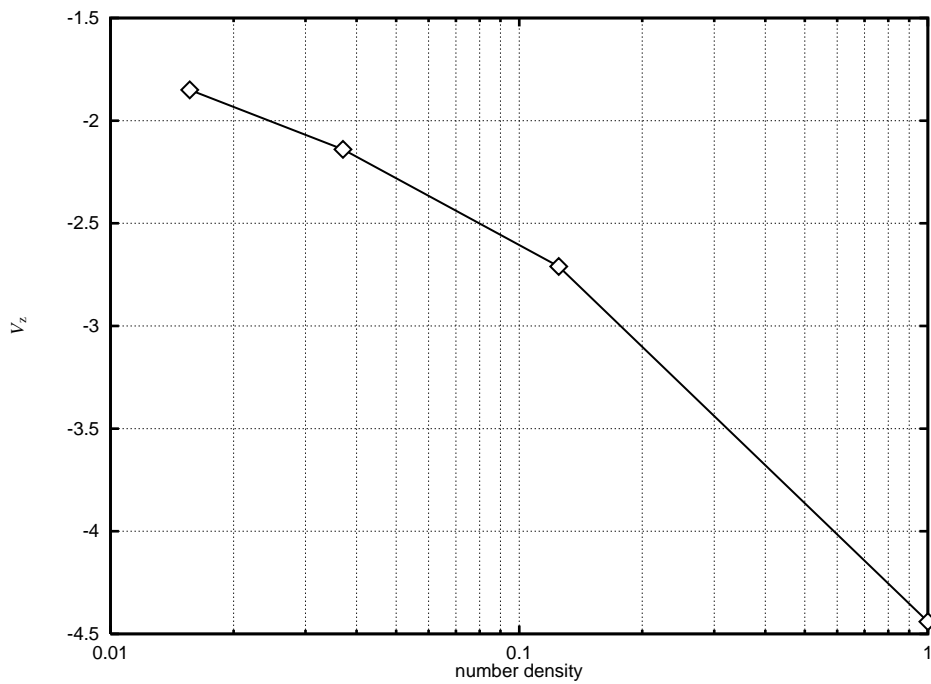


図 42: 規則的な配置からスタートした時の $t = 5$ における粒子の平均落下速度. 横軸は数密度を対数スケールでとっている. 数密度が大きいと, 落下速度は 10 倍近く速くなる.

t	x	y	z	V_x	V_y	V_z
0	-7.500	-2.500	-2.500	0.000	0.000	-1.000
10	-8.201	-3.013	-41.504	0.051	-0.012	-3.769
20	-4.694	-1.815	-81.808	0.367	0.127	-4.470
30	-2.586	-1.082	-129.545	0.124	0.052	-5.265
40	-2.860	-1.140	-182.517	-0.072	-0.023	-4.933
50	-4.594	-1.809	-227.937	-0.286	-0.106	-4.168
60	-8.209	-3.160	-266.324	-0.343	-0.145	-3.519
70	-9.578	-3.895	-299.331	0.136	0.038	-3.302
80	-8.361	-3.714	-334.269	0.083	-0.013	-3.551
90	-7.309	-3.773	-370.278	0.058	-0.028	-3.637
100	-6.206	-3.507	-406.376	0.162	0.095	-3.641

表 2: 粒子の回転を考慮しない場合の粒子 A の座標, 速度の時間変化. A: 初期の位置が $(x, y, z) = (-7.5, -2.5, 7.5)$

5 考察

粘性流体中での粒子の多粒子系としての振舞いは、 $2 \cdot 3 \cdot 4$ 粒子系での粒子のふるまいにも見ることができる。いいかえると、少数粒子系での素過程の組合せによって多粒子系の振舞いが決定されると考えられる。

2粒子系では、互いの位置関係により、水平・鉛直方向の運動速度が決まり、落下速度は粒子間の距離が近いほど速い。鉛直方向の落下速度は、2粒子が垂直に配置された時に最大となり、その相互作用は、2粒子の距離に反比例する。

3粒子系では、中央に位置する粒子(他の2粒子の近くに位置する粒子)がもっとも速く落下し、ごく特殊な初期配置を除いて、集団が崩壊し、1粒子と2粒子とにわかれる。2粒子系になった集団の方が落下速度が速いので、遅れた1粒子はさらに遅れて落下する。崩壊しない特殊な初期配置として、水平面上に正三角形形状に配置したもの、および鉛直平面上に、正三角形で、そのうちの2粒子を水平に配置したものがある。

4粒子系では、規則的な配置の場合、粒子の個々の回転のほか、粒子の集団全体が相対的に回転運動を起こすが、わずかな配置の乱れが生じると集団としての回転運動は長時間持続しない。集団が分離した後は2粒子系あるいは3粒子系の運動に移る。

多粒子系の運動では、運動範囲を2次元にした時と3次元にした時では集団としての振舞いが異なる。

3次元においては、非常に規則的な初期配置を与えると、粒子集団全体が回転運動を起こし、配置の規則性が崩れると集団の回転運動も崩壊する。しかし、全体が回転運動をしなくなっても、近傍に位置するより少数の集団で新たな回転運動を引き起こす。この繰り返しにより、局所的にはかなり長い時間の間回転運動を持続することになる。集団が崩壊するまでの時間は、粒子の初期配置に強く依存する。

これに対し2次元運動の場合、規則的な初期配置を与えても、ごく少数の粒子を規則的に配置した場合を除いて、集団としての回転運動が起こりにくく、その結果、集団の分離が初期配置によらず直ちに起こり、その後のふるまいは非常に類似したものになる。従って、2次元問題の場合は、粒子の初期配置の依存性があまり認められない。

この両者の違いは、粒子間の相互作用の強さの違いと考えられる。例えば格子上に粒子を配置する場合などを考えると、2次元では最近接の粒子は4つであるのに対し、3次元では6つとなる。粒子間の距離が同じであれば相互作用は3次元の方が大きく、2次元では集団の回転に十分な相互作用が得られないと考えられる。

個々の粒子の回転運動を考慮した場合、その回転は近傍の粒子の並進運動によるものが支配的で、回転運動そのものが周囲の流体の流れに及ぼす影響は小さい。このため、粒子集団のふるまい自体は、回転運動を考慮した時としない時での違いはほとんど現れない。これは式(14)、(19)を見ればわかるように、粒子の並進運動が相手粒子に与える影響は、粒子間距離に反比例するのに対し、粒子の回転運動が与える影響は、粒子間距離の2乗に反比例するからである。このため、回転の影響は、接触するほどごく近傍の粒子にしか影響がない。

実際の火山現象に適用するには、事実上無限の広がりを持った流体中に、相当数の粒子が存在する状況を想定しなければならないため、これらの結果をふまえ、さらに多粒子の場合はどのような現象が起きるかを推察する。

流体中に存在する固体粒子の数密度がはじめ不均質に存在していたとする。数密度の大

きい部分は速い速度で落下しながら集団の回転運動を起こし、集団に属している一部の粒子は放出されて、集団から遅れる。これにより数密度の大きい集団は、その粒子数と体積が減少してゆき、小型化してゆく。

新たにどこかで密度の不均質ができると、やはり回転運動を起こしながら周囲の粒子より速く落下する。

大小さまざまな大きさの粒子が含まれている場合には、このような集団としての落下と回転運動が、局所的、大域的ないろいろなスケールで起こっていると考えられる。

従来の地球物理における混相流の代表的な扱い方は、流体に含まれる粒子はすべて単一の粒子の時と同様な振舞いをするとしたものが多いが、以上の推察により、流体中に十分な数の粒子が存在すると、早い沈降、流体の攪拌など、集団特有の振舞いをはじめると考えられる。

6 まとめと火山学への適用

本研究では、粘性流体中を落下する粒子集団のシミュレーションを多粒子系に対して行なうことを可能にした。

粒子同士の相互作用を求めるのに、Happel (1973) のような摂動展開の形をとらず、多次元の連立1次方程式を用いることで、粒子数を比較的多くとることができる。また Navier-Stokes 方程式を直接解かないので3次元問題についても計算時間がそれほど大きくなるらない。

個々の粒子の回転運動に関心がなく、粒子集団の振舞いのみを調べたい場合には、回転運動を考慮しない系で計算を進めるのがよい。式 (24) を見るとわかるように、回転運動を考慮しない場合には、行列のサイズが縦、横とも半分になり、計算時間はおよそ10分の1に短縮される。

本研究の結果の火山学への適用例として次のようなものが考えられる。

1. 粒子が集団で落下する時は、単独で落下する時よりも落下速度が速くなり、結晶が素早く沈降するので、マグマ中で生成した結晶が取り除かれやすくなるという効果をもたらす。これにより、マグマの組成を変える効果を効率化すると考えられる。どの程度落下速度が速くなるかは図 42 などがそのための基礎データとなる。

2. 結晶の数密度が局所的に不均一であると、その領域が周囲より速く落下しながら回転運動が起こる。これがマグマ中を落下する結晶がマグマを攪拌する役目を果たし得る。攪拌により、マグマの温度やその他さまざまな物性値が均一化される。一般にマグマ中の組成は極めて均一に混合されていることが知られており、この原因の1つとして本研究の結果が適用できる可能性がある。

このほか、気液混相流の問題として、マグマ中をゆっくりと上昇する気泡の流れの解析などにも応用できると思われる。マグマ中に含まれる気泡の体積分率は、地表付近では数十%にも達する場合がある。図 10 などによると、粒子間の平均距離が粒子半径の数倍程度であれば相互作用の効果が出ると思われるので、地表付近では単一の気泡の上昇運動よりも集団としての振舞いが顕著になり得る。粒子集団の上昇、または沈降速度は単一粒子よりも速くなるので、このことが噴火の形態に影響を及ぼす可能性がある。

7 謝辞

本修士論文を作成するにあたって、東京大学地震研究所火山噴火予知研究推進センター 井田喜明教授には全般に渡り適切な御指導を賜りました。ここに厚く御礼申し上げます。また、同研究所地球流動破壊部門 小屋口剛博助教授、火山噴火予知研究推進センター 及川純助手には絶えず有益な議論、御助言をいただきました。ここに感謝致します。

参考文献

- [1] G.K.Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*, chapter 4. 東京電機大学出版局, 1984.
- [2] J.Happel and H.Brenner. *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, chapter 6. Nordhoff, 1973.
- [3] L.D.Landau and E.M.Lifshitz. *Fluid Mechanics*, chapter 2. Pergamon, 1986.
- [4] 日本流体力学学会（編）. 流体力学ハンドブック, 第3章. 丸善, 1987.
- [5] 日本流体力学学会（編）. 混相流における波動, 第2巻, pp. 30–41. 朝倉書店, 1991.
- [6] 高木 周・松本洋一郎. 静止流体中を上昇する球形気泡に働く力. *J.J. Multiphase Flow*, Vol. 10, pp. 264–273, 1996.
- [7] 巽友正. 流体力学, pp. 257–308. 培風館, 1984.
- [8] T.Ymamoto and M.Hakuno. Simulation analysis of volcanic eruption by the modified distinct element method. *J. Phys. Earth*, Vol. 39, pp. 441–460, 1991.
- [9] W.T.Vetterling W.H.Press, S.A.Teukolsky and B.P.Flannery. *NUMERICAL RECIPES in C*, chapter 16. Cambridge College Press, 1992.